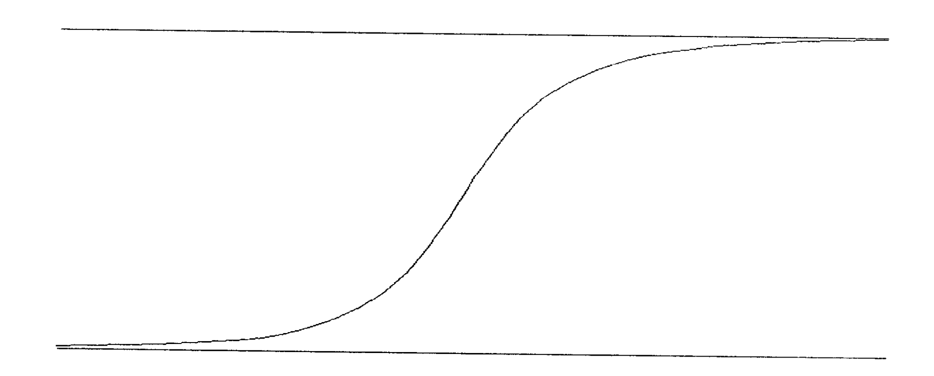
مقدمـــة
في الاحتمالات والتوزيعات وتطبيقاتهما

الجزء الأول
(في متغير واحد)



عصام خلف الحسيني

بطاقة فهرسة
فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية
إدارة الشئون الفنية

الحسيني، عصام خلف
مقدمة في الاحتمالات والتوزيعات وتطبيقاتهما / عصام خلف الحسيني – ط١– القاهرة: دار النشر للجامعات، ٢٠٠٦.
٣٥٦ص ، ٢٤ سم.
المحتويات . جـ١ . في متغير واحد
تدمك ٧ ١٨٩ ٣١٦ ٩٧٧
١- الاحتمالات (رياضيات)
٢- الرياضيات التطبيقية
أ- العنوان ٥١٩,٢

تاريخ الإصدار: ١٤٢٨هـ - ٢٠٠٧م
حقوق الطبع: محفوظة للمؤلف
الناشر: دار النشر للجامعات
رقم الإيداع: ٢٠٠٦/١٩٧٨٤
الترقيم الدولي: I.S.B.N: 977 – 316 – 189 - 7
الكود: ٣/٣٧٥
تحذير: لا يجوز نسخ أو استعمال أي جزء من هذا الكتاب بأي شكل من الأشكال أو بأية وسيلة من الوسائل (المعروفة منها حتى الآن أو ما يستجد مستقبلاً) سواء بالتصوير أو بالتسجيل على أشرطة أو أقراص أو حفظ المعلومات واسترجاعها دون إذن كتابي من الناشر.
دار النشر للجامعات - مصر
ص.ب (١٣٠ محمد فريد) القاهرة ١١٥١٨
تليفون: ٦٣٤٧٩٧٦ - تليفاكس: ٦٤٤٠٠٩٤
E-mail: Darannshr@lLink.net

مقدمة
في الاحتمالات والتوزيعات وتطبيقاتهما
الجزء الأول
(في متغير واحد)

إهداء

- إلى المنعم الكريم

رب العرش العظيم

الــذي علمنا ما لم نكن نعلم

نسأله تعالى أن يجعل من هذا الكتاب

علماً ينتفع به.

- إلى ابنتي إيمان أهدي هذا الكتاب.

مقدمة الطبعة الأولى

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين.

منذ أكثر من ثلاثين عاماً كنت قد أعددت محاضـــرات فـــي الاحتمـــالات والتوزيعات في متغير واحد وفي أكثر من متغير سجلتهما في كتيب لـــم تتجـــاوز صفحاته المائة وخمسين صفحة. وبمرور الـــسنين، أحســـست ضـــرورة فـــصل الاحتمالات والتوزيعات في متغير واحد عن الاحتمالات والتوزيعات في أكثر مـــن متغير، لسببين : الأول أن هناك تفصيلات كثيرة وأمثلة رأيت ضرورة إضافتها إلى كل من الحالتين، والثاني أن بعض جامعاتنا العربية (مثل جامعة أسيوط وجامعـــة الإمارات وجامعة الكويت وجامعة الملك عبد العزيز بجدة وغيرها) قد وضعت لكل منهما مقرراً منفصلاً. يتكون الجزء الأول من ستة أبواب مرقمـــة مـــن 1 — 6، والجزء الثاني من ستة أبواب مرقمة من 7 — 12، على أساس أن الجزء الثـــاني استكمال للجزء الأول، إذ أن القواعد الاحتمالية في أكثر من متغير هي ذات القواعد في متغير واحد فلابد من استيعابها في متغير واحد أولاً حتى يمكن متابعتهـــا فـــي أكثر من متغير ولعل الفرق — في حالة أكثر من متغيـــر — هـــو فـــي الوســـائل الرياضية المستخدمة وحسب.

يحتوي الباب الأول من هـــذا الكتـــاب علـــى فـــضاء العينـــة ومـــسلمات الاحتمالات، والاحتمال المشروط واستقلال الأحداث، وأما الباب الثـــاني فينـــاقش المتغيرات العشوائية ودوال الكتلة والكثافة والتوزيع، ويقدم الباب الثالـــث بعـــض قوانين الكتلة الاحتمالية الهامة (المنـــتظم المتقطـــع، وبرنـــوللي، وذات الحـــدين، والهندسي، وذات الحدين السالب، وفوق الهندسي، وبواسون)، ويعرض الباب الرابع بعض قوانين الكثافة الاحتمالية الهامة (المنتظم المتصل، والمعتـــدل، واللوغـــاريتم

المعتدل، وجاما، والأسي، χ^2 ، ووايبل، وباريتو، وكوشي، t، F)، ويناقش الباب الخامس التوقع الرياضي (العزوم، ودالة توليد العزوم، والدالة المميزة، ودالة توليد التجمعات، ودالة توليد العزوم الضربية) وفي الباب السادس والأخير تطبيقات على نظرية الموثوقية وسلاسل ماركوف.

ويشتمل الكتاب أيضا على خمسة ملاحق: يعرض إثنان منها بعض الصيغ الرياضية الهامة ، و يقدم الملحق الثالث بعض المفاهيم الأساسية لنظرية المجموعات ، و أما الملحق الرابع فيلخص القوانين الاحتمالية المستخدمة ، و الملحق الخامس و الأخير فيه سبعة جداول هى معاملات ذات الحدين و احتمالات ذات الحدين التجميعية و احتمالات بواسون التجميعية و المساحات تحت كثافة التوزيع المعتدل المعيارى و قيم $\chi^2(k)$ و قيم $t(k)$ و قيم $F(m,n)$. وقد تم إعداد هذه الجداول باستخدام EXCEL و بعض البرامج الإحصائية التي أمكن حساب هذه الجداول على أساسها.

الغرض من هذه الملاحق هو الاكتفاء الذاتى (قدر الامكان) بما قد يحتاج إليه الطالب من معلومات رياضية سابقة أو جدولية مطلوبة لاتمام الحسابات.

و نختتم الكتاب بقائمة من المراجع لمن أراد الاستزادة بتفاصيل لم تذكر فى هذا الكتاب أو لبراهين ربما تكون أعلى من مستوى هذا الكتاب.

ولقد انصب الاهتمام على تبسيط المعلومة وضرب الأمثلة المختلفة، ووضع التمارين التي تعين على الاستيعاب وفهم الموضوع فهماً جيداً.

وإن كانت هناك أوجه للقصور — وسبحان الذي له الكمال وحده — فأرجو تنبيهي إلى هذه الأوجه وسأكون لمن يفعل ذلك من الشاكرين.

دكتور / عصام خلف الحسيني

أستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات

نبذة عن المؤلف

الدكتور عصام خلف الحسينى

يعمل أستاذا بقسم الإحصاء وبحوث العمليات بكلية العلوم بجامعة الكويت. حصل على بكالوريوس العلوم من جامعة عين شمس بمصر فى الرياضيات والفيزياء فى عام 1960، وعلى درجة الماجستير فى الإحصاء من جامعة استانفورد (Stanford) بولاية كاليفورنيا الأمريكية وعلى الدكتوراه من جامعة تكساس (A&M) بولاية تكساس الأمريكية. منذ حصوله على درجة البكالوريوس، عمل الدكتور عصام خلف الحسينى بالتدريس والبحث العلمى فى جامعات مصر والولايات المتحدة الأمريكية والإمارات والسعودية والكويت فى مجالات الرياضيات والإحصاء، وتقلد الوظائف المختلفة من معيد إلى مدرس فأستاذ مساعد فأستاذ فرئيس قسم الرياضيات بكلية العلوم بجامعة أسيوط بمصر، وعمل أستاذا للإحصاء فى كل من جامعتى الإمارات بالعين والملك عبد العزيز بجدة.

- دعته منظمة الصحة العالمية (WHO) لقضاء ستة أشهر على نفقتها فى جامعة لندن للصحة العامة وطب المناطق الحارة.
- نشر العديد من الأبحاث فى مجلات عالمية متخصصة، وأشرف على الكثير من رسائل الماجستير والدكتوراه فى الإحصاء تم منحها من جامعات أسيوط والقاهرة والملك عبد العزيز بجدة وناقش وحكم عددا كبيرا من الرسائل العلمية فى الجامعات المصرية وغير المصرية، كما يعمل محكما لأبحاث بعض المجلات العلمية المتخصصة فى الإحصاء والتى تصدر فى أمريكا وألمانيا وكوريا والصين ومصر.
- نائب رئيس تحرير المجلة الأمريكية
Journal of Statistical Theory and Applications
- نائب رئيس تحرير مجلة جمعية الرياضيات المصرية
Journal of the Egyptian Mathematical Society
- عمل عضوا فى اللجان العلمية الدائمة للترقية إلى أستاذ مساعد وأستاذ فى الرياضيات والإحصاء فى مصر.
- عمل عضوا فى اللجنة القومية للرياضيات التابعة لأكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا فى مصر.
- عضو الجمعية الإحصائية المصرية، وجمعية الرياضيات المصرية، والجمعية الإحصائية الأمريكية، ومعهد الإحصاء الأمريكى
(Institute of Statistics)
- حصل على جائزة الدولة التشجيعية فى العلوم الرياضية عن عام ١٩٨٣ وعلى وسام الاستحقاق من الطبقة الأولى فى العلوم والفنون فى عام ١٩٨٥.
- حصل على جائزة هارتلى لعام ٢٠٠٦ من جامعة تكساس A&M بالولايات المتحدة الأمريكية، كأحسن إنتاج علمى فى الإحصاء لهذا العام.

محتويات الكتاب

الصفحة

الصفحة

الباب الرابع
بعض دوال الكثافة الاحتمالية الهامة

الصفحة

الباب الخامس
التوقع الرياضي

الباب السادس
تطبيقات

الصفحة

ملاحق الكتاب

الباب الأول

فضاء العينة، مسلمات الاحتمالات، والاحتمال المشروط، واستقلال الأحداث

(1.1) فضاء العينة Sample Space

يطلق على مجموعة جميع الحالات التي يمكن أن تنتج من إجراء تجربة حقيقية (أو تخيلية) فضاء عينة هذه التجربة، ونرمز لفضاء العينة بالرمز S. فمثلاً

مثال (1.1) : إذا ألقيت عملة نقود مرة واحدة، واتفقنا على أن الصورة = H والكتابة = T هما النتيجتان الوحيدتان للتجربة، فإن فضاء العينة هو المجموعة $S_1 = \{ H , T \}$.

مثال (1.2) : إذا ألقيت عملتان إحداهما من فئة الخمسة قروش والأخرى من فئة العشرة قروش، فإن جميع الحالات الممكنة من إجراء هذه التجربة هي ظهور الصورتين معاً أو ظهور صورة وكتابة أو كتابة وصورة أو كتابتين، وعلى ذلك فإن فضاء العينة في هذه الحالة يكون :

$$S_2 = \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}$$

ونلاحظ أن فضاء العينة S_2 هو حاصل الضرب الكرتيزي لفضاء العينة S_1 [في مثال (1.1)] في نفسه، أي أن فضاء عينة تجربة إلقاء عملتين هو حاصل الضرب الكرتيزي لفضاء عينة تجربة إلقاء عملة واحدة في نفسه، أي :

$$S_2 = S_1 \times S_1 = \{ H, T \} \times \{ H, T \}$$

مثال (1.3) : إذا دحرجت زهرة نرد، فإن جميع الحالات الممكنة التي تنتج عن هذه الدحرجه هي : 1, 2, 3, 4, 5, 6 ، لذلك فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو $S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

مثال (1.4) : إذا دحرجت زهرتا نرد، إحداهما حمراء والأخرى خضراء فإن

فضاء العينة في هذه الحالة يمكن تمثيله بالمجموعة :

$$
\begin{aligned}
S_2 = S_1 \times S_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
&= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \\
&\quad (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \\
&\quad \vdots \\
&\quad (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}
\end{aligned}
$$

أي أن فضاء عينة تجربة دحرجة زهرتي نرد S_2 هو حاصل الضرب الكرتيــزي لفضاء تجربة دحرجة زهرة نرد واحدة S_1 في نفسه.

ويمكن التعبير عن فضاء العينة لتجربة معينة بصور أخرى، فــإذا كتبنــا فضاء العينة بدلالة عدد الصور الناتجة من جراء قذف العملتين [في مثال (1.2)]، الذي يكون صفراً من الصور أو صــورة واحــدة أو صورتين، فإن فضاء العينــة يمكن التعبير عنه بكتابة :

$$S_2 = \{0, 1, 2\}$$

وكذلك يمكن التعبير عن فضاء عينة التجربة [في مثال (1.4)] بدلالــة مجمــوع الناتج من دحرجة زهرتي النرد، الذي يكون 2،... ، 12، فنكتب :

$$S_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

وهكذا.

تعريف (1.1) : فضاء العينة Sample Space

فضاء عينة تجربة واقعية أو تخيلية (S) هو مجموعــة جميــع الأحــداث الممكنة التي تنتج من جراء إجراء هذه التجربة.

ومجموعة هذا شأنها لابد لها من أن تحقق الشرطين الآتيين :

(i) كل عضو من أعضاء S يمثل ناتجاً من نتائج التجربة.

(ii) أي إجراء للتجربة ينتج إنتاجاً يقابل عضواً من أعضاء S.

وعلى الرغم من أن هناك فضاءات عينة تقابل هذه الشروط، ولـذا فهـي تستخدم في وصف نفس التجربة، إلا أنه توجد فضاءات عينة أنسب مـن أخـرى، ومن الأفضل ــ بصفة عامة ــ أن نذكر أكثر ما يمكن من التفاصيل عند اختيارنا لفضاء عينة.

تعريف (1.2) : الحدث Event

الحدث A هو مجموعة جزئية من فضاء عينة S. ونقول إن الحدث A قد وقع إذا كان ناتج التجربة يقابل عضواً من أعضاء A.

ملحوظة : الجديد هنا هو اختلاف في المسميات فقط، إذ أن فضاء العينـة يقابـل المجموعة الشاملة (أو الكونية) في نظرية المجموعات، والحدث يقابل المجموعـة الجزئية وينطبق على الأحداث ما ينطبق على المجموعات الجزئيـة مـن اتحـاد وتقاطع ومتممات الخ [أنظر ملحق (C)]، فمثلاً :

مثال (1.5) : في مثال (1.1) : $A = \{H\}$، $B = \{T\}$ يمثل كل منهما حدث، لأنه مجموعة جزئية من فضاء العينة S_1 ، هذا فضلاً عن أنهما حـدثان متنافيان (لا يمكن وقوعهما معا) إذ أن $A \cap B = \phi$.

مثال (1.6) : في مثال (1.2) إذا اعتبرنا أن A = ظهور صـورة واحـدة علـى الأقل، B = ظهور صورة واحدة فقط، C = ظهور نفس الوجه على العملتين، فإن كلاً من A، B، C مجموعة جزئية مـن S_2 ، ولـذا تمثل حدثاً، حيث :

$$A = \{ (H, H), (H, T), (T, H) \}, B = \{ (H, T), (T, H) \},$$
$$C = \{ (H, H), (T, T) \}$$

ونلاحظ أن $B \subset A$، وهذا يعني أن ظهور "صورة واحدة على الأقل" يحتم "ظهور صورة واحدة فقط"،

وأن $B \cap C = \phi$ ، لأنه يستحيل أن "تظهر صورة واحدة فقط" وفي نفس الوقت "يظهر نفس الوجه على العملتين"،

وأن $B \cup C = S_2$ ، إذ أن وقوع أحد الحدثين على الأقل يؤدي إلى وقوع S_2 ، إذ أن "ظهور صورة واحدة فقط" أو "ظهور نفس الوجه على العملتين" يعني كل عناصر S_2 . لاحظ أن :

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{ (H,T), (T,H) \} \cup \{ (H,H), (T,T) \} \\ &= \{ (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) \} = S_2. \end{aligned}$$

مثال (1.7) : في مثال (1.3) إذا كان A = عدد فردي، B = عدد زوجي، C = عدد فردي لا يساوى واحد، فإن :

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 5\}$$

ويكون : وقوع واحد على الأقل من الحدثين A أو B هو فضاء العينة S_1 . ذلك لأن : $A \cup B = S_1$ ، إذ أن عدداً فردياً أو زوجياً يعني فضاء العينة كله، $C \subset A$.

$B \cap C = \phi$ ، إذ يستحيل أن يكون العدد فردياً، وفي نفس الوقت يكون زوجياً.

ومتمم A هو B (إذ أنه إن لم يكن العدد فردياً فإنه يكون زوجياً).

وكذلك فإن متمم B هو A (إذ أنه إن لم يكن العدد زوجياً فإنه يكون فردياً).

مثال (1.8) : في مثال (1.4) إذا كان A = تساوي العددين على الزهرتين، B = مجموع العددين على الزهرتين زوجي، C = مجموع العددين على الزهرتين فردي، فإنه من S_2 :

$$\begin{aligned} A &= \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \} \\ B &= \{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), \\ &\quad (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \} \\ C &= \{ (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), \end{aligned}$$

$(5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\ \}$

ونلاحظ أن الحدثين B، C متنافيان ($B \cap C = \phi$) لاستحالة وقوعهما معاً، $A \subset B$ بينما $A \not\subset C$، إذ أن وقوع B يحتم وقوع A، فتساوي العددين على الزهرتين يجعل مجموعهما زوجياً، ولا يجعل مجموعهما فردياً.

وأخيراً فإن $B \cup C = S_2$ لأن وقوع أحد الحدثين B أو C على الأقل يعني أن مجموع العددين على الزهرتين زوجي أو فردي، وهذا يشمل كل عناصر فضاء العينة.

لا يشترط أن يكون فضاء العينة متقطعاً، ولكن يمكنه أن يكون متصلاً، فمثلاً :

مثال (1.9) : اختبر جهاز إلكتروني، وسجل وقت خدمته الكلي. إذا كان فضاء العينة هو $S = \{\, t \mid t \ge 0 \,\}$ ، وأن الأحداث A، B، C هي :

$$A = \{\, t \mid t < 100 \,\}, B = \{\, t \mid 50 \le t \le 200 \,\}, C = \{\, t \mid t > 150 \,\},$$

حيث t هو الزمن بالساعة. فيمثل الحدث A مثلاً أن وقت خدمة الجهاز أقل من مائة ساعة، B أن وقت خدمة الجهاز يقع بين 50، 200 ساعة (شاملاً النهايتين)، C أن وقت خدمة الجهاز يتجاوز 150 ساعة. نلاحظ هنا أن :

$$A \cup B = \{\, t \mid t \le 200 \,\}, A \cap B = \{\, t \mid 50 \le t < 100 \,\},$$
$$B \cup C = \{\, t \mid t \ge 150 \,\}, B \cap C = \{\, t \mid 150 < t \le 200 \,\},$$
$$A \cap C = \phi, A \cup C = \{\, t \mid t \le 100 \text{ or } t > 150 \,\},$$
$$A^c = \{\, t \mid t \ge 100 \,\}\ , C^c = \{\, t \mid t \le 150 \,\}$$

حيث يرمز الحرف c فوق رمز المجموعة إلى متمم المجموعة [أنظر ملحق (C)]، فمثلاً A^c = متمم الحدث A، (c هو أول حرف في كلمة compliment التي تعني متمم).

تعريف (1.3) : الأحداث المتنافية

Disjoint (Mutually Exclusive) Events

يقال للحدثين A، B بأنهما متنافيان، إذا لم يمكن وقوعهما معاً، ونعبر عن هذا بكتابة أن $A \cap B = \phi$ ، أي أن تقاطع A، B هو المجموعة الخالية، بمعنى أنه يستحيل وقوع (تقاطع) A، B معاً.

من أهم خصائص فكرة (التجربة) هي أنه لا يمكننا معرفة ناتج التجربة بالتحديد قبل إجرائها، ولذا فقد أصبح من الضروري لدينا أن نربط رقماً بالحدث — ليقيس مفهوم معين — بالقدر الذي يرجح (أو يحتمل) فيه وقوع الحدث، وهذا يقودنا إلى نظرية الاحتمالات.

(1.2) مسلمات الاحتمالات Axioms of Probability

لنفرض إجراء تجربة ما ينتج عنها فضاء عينة S. سنحدد لكل حدث A ينتج في S عدداً حقيقياً نرمز له بالرمز P(A) يحقق المسلمات الآتية :

(1) $0 \le P(A) \le 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

حيث A_1، A_2، ... تمثل متتابعة لأحداث متنافية (أي $A_i \cap A_j = \phi, i \ne j$) ونقول إن P(A) هو احتمال حدوث الحدث A، والمقصود بالرمزين في المسلمة (3) هو :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

فتقول المسلمة الأولى إن احتمال وقوع أي حدث A (أي احتمال أن يكون ناتج

التجربة هو نقطة تنتمي إلى A) هو عدد حقيقي يقع بين الصفر والواحد، وتقــول المسلمة الثانية إن احتمال وقوع فضاء العينة كله S هو الواحد، وأمــا المــسلمة الثالثة فتقول إنه لأي متتابعة لأحداث متنافية يكون احتمال وقوع واحد منها علــى الأقل هو مجموع احتمالات وقوع الأحداث المناظرة.

سنثبت أنه إذا مثلت ϕ الحدث مستحيل الوقوع فإن $P(\phi)=0$ ، وتــستخدم هــذه الحقيقة في إثبات أن المسلمة الثالثة صحيحة لأي عدد محدود من الأحداث المتنافية، أي أن

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

حيث A_1 ،...، A_n تمثل أحداثا متنافية.

وهذه النتيجة صحيحة إذا اعتبرنا أن : $A_{n+1}=A_{n+2}=\ldots=\phi$ في المسلمة الثالثة، فيكون $P(A_i)=P(\phi)=0$ عندما $i=n+1, n+2, \ldots$ لذلك فإنه إذا كانت A_1، ...، A_n تمثل أحداثا متنافية، فإن :

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right], \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i=\phi\right) \\
&= P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right]=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i),
\end{aligned}$$

لاحظ أن الحدث ϕ حدث متناف مع أي حدث A لأن $A\cap\phi=\phi$ لأي A.

كما أن $\sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)=0$ لأن : $P(A_i)=P(\phi)=0$ ، لكل $i=n+1, n+2, \ldots$.

سنثبت في الآتي بعض القواعد الأساسية للاحتمالات :

القاعدة الأولى : إذا مثل ϕ الحدث مستحيل الوقوع فإن $P(\phi) = 0$، أي أن احتمال حدث مستحيل الوقوع هو الصفر.

البرهان : يمكن كتابة أي حدث على الصورة $A = A \cup \phi$، ونظراً لأن ϕ متنافية مع أي حدث A، فإن

$$P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi) \Rightarrow P(\phi) = 0$$

القاعدة الثانية : إذا مثل A^c متمم الحدث A، فإن :

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

البرهان : إتحاد حدثين يتمم أحدهما الآخر هو فضاء العينة S، فضلاً عن أنهما متنافيين، أي أن :

$$S = A \cup A^c ,$$

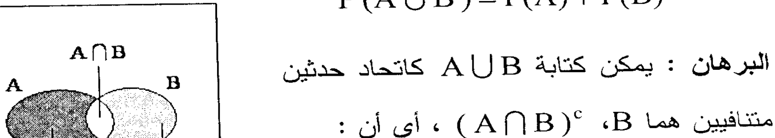
حيث A^c ،A يكونان متنافيين، لذلك فإنه باستخدام المسلمة الثانية

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P (A^c)$$

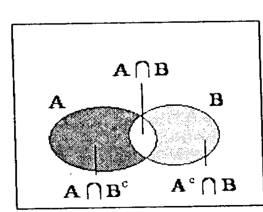
القاعدة الثالثة : إذا مثل A، B حدثان بالنسبة إلى فضاء عينة S فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P (A \cap B)$$

وعندما يكون الحدثان A، B متنافيين، فإن :



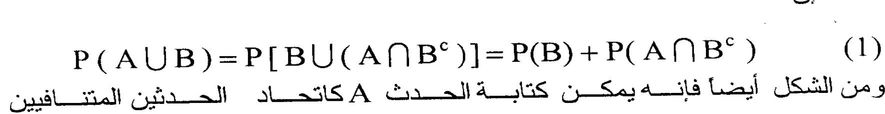
$$P (A \cup B) = P(A) + P(B)$$



البرهان : يمكن كتابة $A \cup B$ كاتحاد حدثين متنافيين هما B، $(A \cap B)^c$ ، أي أن :

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$

لذلك فإن :



$$P (A \cup B) = P [B \cup (A \cap B^c)] = P(B) + P(A \cap B^c) \qquad (1)$$

ومن الشكل أيضاً فإنه يمكن كتابة الحدث A كاتحاد الحدثين المتنافيين

$(A \cap B^c)$، $(A \cap B)$ أي أن :

$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

لذلك فإن :

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

وبالتعويض عن $P(A \cap B^c)$ في (1) ينتج أن :

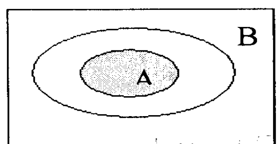
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ملحوظة : كان من الممكن استخدام المتطابقة :

$$A \cup B = (A^c \cap B) \cup A$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A^c \cap B) + P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

القاعدة الرابعة : إذا كان $A \subset B$ ، فإن $P(A) \leq P(B)$

البرهان : إذا كان $A \subset B$ ، فإن :



$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

حيث A، $(A^c \cap B)$ متنافيان، لذلك فإن :

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A)$$

(لأن $P(A^c \cap B) \geq 0$ لكونه احتمالاً).

وهذه نتيجة بديهية، إذ أنه إذا كانت B لابد واقعة إذا وقعت A، فإن B تكون أكثر احتمالاً من A.

مثال (1.10) : الحدثان A، B متنافيين بحيث أن $P(A) = 0.25$، $P(B) = 0.4$.

إحسب

(i) $P(A^c)$, (ii) $P(A \cup B)$, (iii) $P(A^c \cap B^c)$,
(iv) $P(B^c)$, (v) $P(A \cap B)$.

الحل :

(i) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = 0.75$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.65$

(iii) $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 0.35$

(iv) $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.6$

(v) $P(A \cap B) = 0$,   (لأن A ، B متنافيان)

مثـــال (1.11) : إذا كـــان $P(A) = 0.5$ ،$P(B) = 0.3$ ،$P(A \cap B) = 0.1$ ، فاحسب

(i) $P(A \cup B)$, (ii) $P(A^c \cap B)$, (iii) $P(A \cap B^c)$,

(iv) $P(A^c \cup B^c)$.

الحل :

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7$

(ii) $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

$\Rightarrow P(A^c \cap B) = 0.3 - 0.1 = 0.2$

(iii) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$\Rightarrow P(A \cap B^c) = 0.5 - 0.1 = 0.4$

(iv) $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) = 0.9$

مثال (1.12) : إثبت أنه إذا كانت الأحداث A ،B ،C تنتمي إلى فضاء العينـــة S، فإن :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

الحل : إذا اعتبرنا : $D = B \cup C$ فإن :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$P(D) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$P(A \cap D) = P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$P(A \cap D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

وبالتعويض عن $P(D)$، $P(A \cap D)$ ينتج أن :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &\quad - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

مثال (1.13) : في تجربة إلقاء عملة، احتمال الصورة فيها $\frac{1}{3}$ ، ثلاث مرات.

(i) أكتب فضاء العينة.

(ii) إعتبر أن A = الحصول على صورة واحدة وكتابتين.
B = الحصول على صورتين على الأقل.
C = الحصول على كتابتين على الأقل.

إحسب :

(a) $P(B^c)$ ، (b) $P(A \cap C)$ ، (c) $P(A \cup B)$

الحل : فضاء العينة هو :

(i) $S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$

والأحداث A، B، C هي :

$A = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)\}$

$B = \{(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (H, H, H)\}$

$C = \{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)\}$

(a) $P(B) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$

$P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{20}{27}$

(b) $A \cap C = A$ (لاحظ أن $A \subset C$)

$$P(A \cap C) = P(A) = 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(c) $(A \cup B)^c = \{(T, T, T)\}$

$$P(A \cup B)^c = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)^c = \frac{19}{27}$$

(1.2.1) حينما تتساوى احتمالات عناصر فضاء العينة
Equally Likely Outcomes of Sample Space

هناك تجارب عديدة تكون احتمالات عناصر فضاء العينة فيها كلها متساوية، أي أن كل عنصر له نفس احتمال أي عنصر آخر. فإذا فرضنا أن فضاء العينة S يتكون من عدد محدود من النقط، وليكن $S = \{1, ..., k\}$ ، فإنه يكون من الطبيعي في كثير من الأحيان افتراض أن $P(\{1\}) = ... = P(\{k\})$ أو أن :

$$P(\{i\}) = \frac{1}{k}, i = 1, ..., k$$

لذلك فإنه لأي حدث A، يكون

$$P(A) = \frac{\text{عدد النقط في الحدث } A}{\text{عدد النقط في فضاء العينة } S}$$

أي أن احتمال أي حدث (في حالة تساوي احتمالات عناصر فضاء العينة) يكـــون مساوياً لنسبة عدد النقط في فضاء العينة المحتواة في هذا الحدث.

ملحوظة : حينما تكون العملة متزنة (أي أن $P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$)، فإن فضاء العينة الناتج من إلقائها أي عدد من المرات يكون من النوع الذي تتساوى فيه

احتمالات فضاء العينة، وبالمثل حينما تكون الزهرة متزنة (أي أن $P(\{i\})=\frac{1}{6}$ حيث $i = 1, \ldots, 6$).

مثال (1.14) : إذا ألقيت عملة متزنة ثلاث مرات احتمال أي عنصر من عناصر فضاء العينة هو $\frac{1}{8}$. إذا عرفت A، B ، C كما في مثال (1.13)، فإن

(a) $P(B)=4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\ , P(B^c)=\frac{1}{2}$.

(b) $P(A\cap C)=P(A)=\frac{3}{8}$.

(c) $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$.

مثال (1.15) : في تجربة إلقاء زهرتي نرد متوازنتين مرة واحدة، ما هو احتمال أن يكون مجموع الظاهرين على وجهي الزهرتين مساوياً العدد 7 ؟

الحل : إذا اعتبرنا أن الحدث A = مجموع العددين الظاهرين على وجهي الزهرتين مساوياً 7 فإن :

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

ويكون عدد النقط في الحدث A هو 6 بينما عدد نقط فضاء العينة 36.

لذلك فإن : $$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

مثال (1.16) : سحبت كرتان عشوائياً من صندوق به 6 كرات بيضاء، 5 كرات سوداء. ما هو احتمال أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء والأخرى سوداء ؟

الحل : عدد الطرق التي تسحب بها كرتان من 11 كرة هو $\binom{11}{2}$ وهو يمثل عدد

النقط في فضاء العينة لهذه التجربة، الحدث A = سحب كرة بيضاء من 6 كـرات بيضاء، وكرة سوداء من خمس كرات سوداء.

عدد النقط في الحدث $A = \binom{6}{1}\binom{5}{1}$.

لذلك فإن :

$$P(A) = \frac{\text{عدد النقط في الحدث } A}{\text{عدد النقط في فضاء العينة}} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$$

الحل السابق لا يأخذ في الاعتبار الترتيب الذي سحبت على أساسه الكرتان.

فإذا أخذنا في الاعتبار ترتيب السحب، فيمكننا أن ننظر إلى حل المسألة بشكل آخر، إذ أن فضاء العينة يتكون في هذه الحالة من 110 = 10 . 11 نقطة، كما أن هناك 30 = 5 . 6 طريقة لأن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيـضاء والثانيـة سـوداء، وكذلك 30 = 6 . 5 طريقة لأن تكون الكرة الأولى المـسحوبة سـوداء والثانيـة بيضاء.

فبافتراض أن " السحب العشوائي" يعني أن كل نقطة من النقط الـ 110 في فضاء العينة لها نفس الاحتمال، فإن احتمال الحدث A يكون :

$$P(A) = \frac{30+30}{110} = \frac{6}{11}$$

مثال (1.17) : إذا كان المطلوب هو اختيار لجنة من خمسة أشخاص من مجموعة فيها 6 رجال، 9 نساء، وكان الاختيار عشوائياً، فما هو احتمال أن تتكون اللجنة من 3 رجال، 2 من النساء؟

الحل :

عدد نقط فضاء العينة = عدد طرق اختيار 5 أشخاص من 15 شخصاً $= \binom{15}{5}$

إذا كان الحدث A = أن تتكون اللجنة من 3 رجال، 2 من النساء، فإن عدد النقط في الحدث $A = \binom{6}{3}\binom{9}{2}$

لذلك فإن : $P(A) = \dfrac{\text{عدد النقط في الحدث A}}{\text{عدد نقط فضاء العينة}} = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{240}{1001}$

مثال (1.18) : في تجربة إلقاء عملة متوازنة ست مرات، ما هو احتمال ظهور الصورة على الأقل مرة واحدة؟

الحل : نظراً لأن العملة متوازنة فإن عناصر فضاء العينة تكون متساوية الاحتمال. ومن الأسهل في هذا المثال حساب متمم الحدث المطلوب. فإذا اعتبرنا أن :

A = ظهور صورة على الأقل مرة واحدة، فإن :

A^c = عدم ظهور صور $\{(T, T, T, T, T, T)\}$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$$

(1.3) الاحتمال المشروط Conditional Probability

سنقدم في هذا الفصل واحداً من المفاهيم الهامة في نظرية الاحتمالات وهو الاحتمال المشروط. ومن أسباب أهمية هذا المفهوم أنه أحياناً ما تكون المعلومات التي نعرفها عن التجربة هي معلومات جزئية حيث يكون الاحتمال الممكن في هذه الحالة هو احتمال مشروط. ومن جهة أخرى فإنه لا يمكن في بعض الأحيان حساب

الاحتمال الكلي لحدث إلا من خلال حساب الاحتمالات المشروطة لهذا الحدث. فمثلاً في تجربة سحب كرتين واحدة تلو الأخرى من صندوق يحتوي على عدد من الكرات البيضاء، وعدد آخر من الكرات السوداء، فإنه لا يمكن حساب احتمال أن تكون "الكرة الثانية بيضاء" إلا إذا علمنا ماذا كان لون الكرة الأولى، أي أنه يمكن حساب احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء بشرط معرفة ما إذا كانت الأولى بيضاء أو سوداء، ولا يمكن حساب احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء إلا من خلال هذه الشروط.

إذا اعتبرنا أن A = الكرة الأولى بيضاء، B = الكرة الثانية بيضاء، فإننا نعبر عن احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت (أو بشرط) الأولى بيضاء بكتابة $P(B \mid A)$ وتقرأ احتمال B (أي الثانية بيضاء) بشرط وقوع A (أي الأولى بيضاء). كذلك فإن $P(B \mid A^c)$ تعني احتمال B (أي الثانية بيضاء) بشرط A^c (أي الأولى سوداء). ويمكن حساب الاحتمال الكلي للحدث B أي $P(B)$ من خلال هذه الاحتمالات المشروطة كما سيتبين فيما بعد.

وهنا يجب أن نعي الفارق بين الاحتمال الكلي $P(B)$ والاحتمال المشروط $P(B \mid A)$. فحينما نحسب $P(B)$ فإن سؤالنا هو عن احتمال وقوع B إذا كنا نعلم أن فضاء العينة هو S، بينما $P(B \mid A)$ يعني احتمال الحدث B إذا كان فضاء العينة هو A. واحتمال وقوع B بشرط وقوع حدث سابق A يلزمنا بفضاء العينة المتمثل في الحدث المشروط عليه A وليس فضاء العينة الأصلي S. أي أن فضاء العينة قد صغر من S إلى A.

تعريف (1.4) : الاحتمال المشروط :

إذا كان الحدثان A، B مسندين إلى فضاء عينة S بحيث أن $P(A) > 0$،

فإن احتمال الحدث B بشرط وقوع الحدث A، ونرمز لهـــذا بـــالرمز $P(B \mid A)$، يعرف بالآتي :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; .$$

ونلاحـــظ من المناقشة السابقة أن هناك طريقتين لحساب الاحتمـــال المـــشـــروط $P(B \mid A)$:

(1) مباشرة بحساب احتمال B بالنسبة إلى فضاء العينة القاصرة على A.

(2) باستخدام التعريف الذي نحسب فيه $P(A \cap B)$، $P(A)$ بالنسبة إلى فـــضاء العينة الأصلي S.

ملاحظات :

(1) إذا كان $A = S$، حيث S هو فضاء العينة الذي ينسب إليه كل مـــن A، B، فإن $S \cap B = B$، $P(S) = 1$، لذلك فإن :

$$P(B \mid S) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = P(B) \; .$$

وهذه نتيجة متوقعة لأن اشتراط وقوع S هو بيان أن التجربة قد أجريت وهو مـــا يتفق مع المناقشة السابقة بأن الاحتمال الكلي $P(B)$ هو الاحتمال المشروط للحدث B بالنسبة إلى فضاء العينة S.

(2) يمكن كذلك كتابة :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

لذلك فإن :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

أو

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$$

مثال (1.19) : في تجربة دحرجة زهرتي نرد متوازنتين علمنا أن فضاء العينـــة S يتكون من 36 عنصراً لكل منها نفس الاحتمال، أي $\frac{1}{36}$ هو احتمال وقـــوع أي عنصر من عناصر فضاء العينة S حيث :

$$S=\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),$$
$$\vdots$$
$$(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

إفرض أن : A = مجموع العددين على الزهرتين هو 10،

B = العدد على الزهرة الأولى أكبر من العدد على الزهرة الثانية.

فيكون : $A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$$B=\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),$$
$$(4,3),(5,3),(6,3),(5,4),(6,4),(6,5)\}$$

ويكون $P(A)=\dfrac{3}{36}$ ، $P(B)=\dfrac{15}{36}$ ، $P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{3}$ ، $P(A\,|\,B)=\dfrac{1}{15}$

وذلك لأن فضاء العينة عند حساب $P(B \mid A)$ هو A، والسؤال هـو مـا عـدد عناصر A التي يكون فيها العدد الظاهر على الزهرة الأولى أكبر من العدد الظاهر على الزهـرة الثانيـة، والجـواب هـو عنـصر واحـد وهـو $(6,\ 4)$، لـذلك فإن $P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{3}$.

وعند حساب $P(A \mid B)$، فإننا نبحث عن عدد عناصر A في المجموعـة (فـضاء العينة) B. أي عدد العناصر في B التي يكون فيها مجموع العددين الظاهرين على الزهرتين = 10. ولا يوجد إلا عنصر واحد في B يحقق ذلك وهو العنصر $(6,4)$، لذلك فإن : $P(A\,|\,B)=\dfrac{1}{15}$.

وباستخدام التعريف، فإن :

$$A\cap B=\{(6,4)\}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{36}\ .$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{3}{36}\right)}=\frac{1}{3},$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{15}{36}\right)}=\frac{1}{15}.$$

مثال (1.20) : في تجربة إلقاء عملتين متوازنتين مرة واحدة، ما هو إحتمال ظهور صورتين بشرط أن تكون الأولى صورة؟

الحل : في هذه التجربة (عملتين متوازنتين) تكون عناصر فضاء العينة $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ كلها متساوية الاحتمال $\frac{1}{4}$.

إفرض أن : A = ظهور صورة على العملة الأولى = $\{(H,H),(H,T)\}$،

B = ظهور صورة على كل من العملتين = $\{(H,H)\}$.

فيكون : $P(A)=\frac{2}{4}$ ، $P(B)=\frac{1}{4}$ ، $P(B|A)=\frac{1}{2}$

لأن عدد عناصر A التي تظهر صورة على كل من العملتين هو 1، ونظــراً لأن فضاء العينة A يحتوي على عنصرين، لذلك فإن $P(B|A)=\frac{1}{2}$

ويمكن استخدام التعريف، حيث $B\cap A=\{(H,H)\}$، فيكون :

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{2}{4}\right)}=\frac{1}{2}.$$

مثـــال (1.21) : يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء، 5 حمراء، 10 ســـوداء. سحبت كرة واحدة من الصندوق ولوحظ أنها ليست سوداء، ما هـــو احتمال أن تكون حمراء؟

الحل : إفرض أن R = الكرة المسحوبة حمراء

B = الكرة المسحوبة سوداء.

فيكون المطلوب هو حساب : $P(R\,|\,B^c)$. باستخدام التعريف فإن :

$$P(R\,|\,B^c) = \frac{P(R \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(R)}{1 - P(B)} = \frac{\left(\frac{5}{25}\right)}{1 - \frac{10}{25}} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أن الحدث : $R \cap B^c$ يعني أن تكون الكرة حمراء وفي ذات الوقت ليست سوداء، فهي إذن حمراء، أي أن $R \cap B^c = R$.

ويمكن حساب $P(R\,|\,B^c)$ مباشرة باعتبار عدد عناصر R المنسوبة إلـى عـدد عناصر B^c. أي 5 إلى 15، لذلك فإن $P(R\,|\,B^c) = \frac{1}{3}$.

(1.3.1) نظرية الاحتمال الكلي

تعريف (1.5) تقسيم فضاء العينة :

سنقول إن الأحداث B_1، ...، B_k تمثل تقسيماً لفضاء عينة S إذا توفرت فيها الشروط الآتية :

(i) $B_i \cap B_j = \phi \ , \ (i \neq j)$

أي أن كل حدثين من أحداث التقسيم يكونان متنافيين.

(ii) $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = S.$

(iii) $P(B_j) > 0 \ , \ j = 1, \ldots, k \, .$

فمثلاً إذا ألقيت زهرة مرة واحدة واعتبرنا أن :

$$B_1 = \{1\}, B_2 = \{2, 3\}, B_3 = \{4, 5, 6\}$$

فإن B_1، B_2، B_3 تمثل تقسيماً لفضاء العينة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

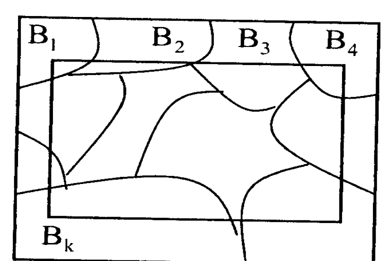
نظرية الاحتمال الكلي :

إذا مثلت B_1 ، ... ، B_k تقسيماً لفضاء عينة S، وكان A هو أحد أحداث S فإن:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)\, P(B_j)$$

البرهان : يمكن كتابة الحدث A بدلالة أحداث التقسيم كالآتي :

$$A = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$



المستطيل الصغير يمثل الحدث A

ونظراً لأن B_1 ، ... ، B_k تمثل تقسيماً لفضاء العينة، فهي أحداث متنافية، وأجزاء الأحـداث المتنافية تكون أيضاً متنافية، وبناء عليه فإن $(A \cap B_1)$ ، ... ، $(A \cap B_k)$ أحداث متنافيـة.

لذلك فإن :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_k)\ .$$

وباستخدام التعريف، فإن : $P(A \cap B_j) = P(A \mid B_j)\, P(B_j)$. لذلك فإن :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)\, P(B_j)\ .$$

(1.3.2) نظرية بييز Bayes Theorem

إذا مثلت B_1 ، ... ، B_k تقسيماً لفضاء عينة S. وكان A هو أحد أحداث S فإن :

$$P(B_j \mid A) = \frac{B(A \mid B_j)\, P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}\ , \ j = 1, \ldots, k$$

البرهان : من تعريف الاحتمال المشروط، فإن :

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}\ .$$

ويمكن كتابة البسط (من تعريف الاحتمال المشروط) على الصورة :

$$P(A \cap B_j) = P(A \mid B_j)\, P(B_j)$$

وأما المقام فينتج من نظرية الاحتمال الكلي أن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

لذلك فإن :

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}$$

مثال (1.22) : تنتج مصانع ثلاثة 1، 2، 3 قطعاً معينة تستخدم في الأغراض الصناعية، ينتج مصنع 1 ضعف ما ينتجه مصنع 2، وأما مصنع 2 فإنتاجه هو نفس عدد القطع التي ينتجها مصنع 3 (في وقت معين من أوقات الإنتاج). نعلم كذلك أن النسب المئوية للقطع المعيبة التي ينتجها مصنعا 1، 2 هي 2%، بينما نسب المعيب في إنتاج مصنع 3 هو 4%. أخذت جميع القطع المنتجة ووضعت في كومة واحدة ثم أخذت قطعة عشوائياً :

(1) ما هو احتمال أن تكون هذه القطعة معيبة؟

(2) إذا علمت أن القطعة المأخوذة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج مصنع 1؟

(3) إذا علمت أن القطعة المأخوذة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج مصنع 2؟

(4) إذا علمت أن القطعة المأخوذة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج مصنع 3؟

الحل : إفرض أن A = القطعة المأخوذة معيبة.

B_1 = القطعة أنتجها مصنع 1.

B_2 = القطعة أنتجها مصنع 2.

B_3 = القطعة أنتجها مصنع 3.

للإجابة على السؤال الأول يكون المطلوب هو حساب $P(A)$.

وباستخدام نظرية الاحتمال الكلي، فإن :

$$P(A)=P(A\mid B_1)\,P(B_1)+P(A\mid B_2)\,P(B_2)+P(A\mid B_3)\,P(A_3)$$

وتلخيصاً للمعطيات فإن :

المصنع	1	2	3
نسب الإنتاج	2 :	1 :	1
المعيب في الإنتاج	0.02	0.02	0.04

لذلك فإن :

$$P(B_1)=\frac{2}{4}\ ،\ P(B_2)=\frac{1}{4}\ ،\ P(B_3)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\mid B_1)=0.02\ ،\ P(A\mid B_2)=0.02\ ،\ P(A\mid B_3)=0.04$$

(1) واحتمال أن تكون القطعة المأخوذة معيبة هو

$$P(A)=(0.02)\left(\frac{2}{4}\right)+(0.02)\left(\frac{1}{4}\right)+(0.04)\left(\frac{1}{4}\right)=0.025$$

(2) يمكن صياغة السؤال "إذا علمت أن القطعة المأخوذة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج مصنع 1 " رمزياً بسؤال ما هو احتمال $B_1 \mid A$ أي :

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)\,P(B_1)}{P(A)}=\frac{(0.02)\left(\frac{2}{4}\right)}{0.025}=\frac{2}{5}$$

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(A\mid B_2)\,P(B_2)}{P(A)}=\frac{(0.02)\left(\frac{1}{4}\right)}{0.025}=\frac{1}{5} \qquad (3)$$

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(A\mid B_3)\,P(B_3)}{P(A)}=\frac{(0.04)\left(\frac{1}{4}\right)}{0.025}=\frac{2}{5} \qquad (4)$$

لاحظ أن : $\sum_{i=1}^{3}P(B_i\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)+P(B_3\mid A)=1$.

مثال (1.23) : تعتقد شركة تأمين أنه يمكن تقسيم الناس إلى قسمين، أحدهما يميل إلى عمل الحوادث والآخر ليس كذلك. ولقد أثبتت إحصاءات الشركة أن الشخص الذي يميل إلى الحوادث سيعمل حادثة في زمن معين خلال عام باحتمال قدره 0.4 بينما يقل هذا الاحتمال بالنسبة

إلى الشخص الذي لا يميل إلى الحوادث إلى 0.2. فإذا افترضنا أن 30% من المجتمع يميلون إلى الحوادث، فما هو احتمال أن يعمل أحد الحاملين لوثيقة تأمين جديدة حادثاً خلال عام من شرائه الوثيقة؟ وإذا عمل أحد الحاملين للوثيقة الجديدة حادثاً خلال عام فما احتمال أن يكون من الذين يميلون إلى الحوادث؟

الحل : نفرض أن A = أحد الحاملين لوثيقة تأمين جديدة سيرتكب حادثاً خلال عام من شرائه الوثيقة.

B = حامل الوثيقة يميل إلى الحوادث.

فيكون المطلوب هو حساب $P(A)$. ومن نظرية الاحتمال الكلي فإن :

$$P(A) = P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid B^c)\, P(B^c)$$

ومن المعطيات فإن : $P(B) = 0.3$ ، $P(B^c) = 0.7$

$P(A \mid B) = 0.4$ ، $P(A \mid B^c) = 0.2$

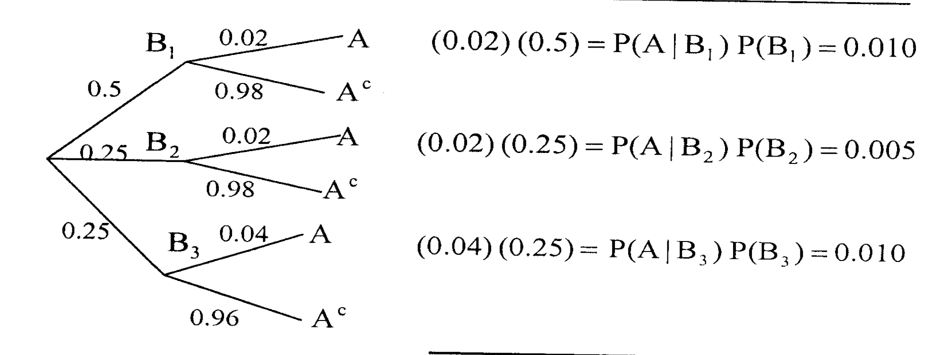
لذلك فإن : $P(A) = (0.4)\,(0.3) + (0.2)\,(0.7) = 0.26$

وللإجابة على الجزء الثاني من السؤال فإن المطلوب هو حساب $P(B \mid A)$. ومن نظرية بييز، فإن :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{(0.4)\,(0.3)}{0.26} = \frac{6}{13}$$

ملاحظات :

أولاً : يستخدم أحياناً الشكل التخطيطي للشجرة (tree diagram) في حل مثل هذه التمارين، ففي مثال (1.22) يمكننا رسم الشجرة كالآتي :



$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\, P(B_i) = 0.25$$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\, P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.010}{0.025}$$

$$= 0.4$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)\, P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.005}{0.25}$$

$$= 0.2$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)\, P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.010}{0.025}$$

$$= 0.4$$

كذلك تكون الشجرة في مثال (1.23) على الصورة :

B 0.4 A
0.3 0.6 A^c
0.25 B^c 0.02 A
0.8 A^c

$$(0.4)\,(0.3) = 0.12 = P(A \mid B)\,P(B)$$

$$(0.2)\,(0.7) = 0.14 = P(A \mid B^c)\,P(B^c)$$

$$\Rightarrow\ 0.26 = P(A)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.26} = \frac{6}{13}.$$

ثانياً : الاحتمال المشروط لا يختلف في خصائصه عن الاحتمال الكلي، فمثلا

(i) إذا كان A، B متنافيين، فإن :

$$P[A \cup B \mid C] = P[A \mid C] + P[B \mid C]$$

(ii)
$$P[A \mid C] + P[A^c \mid C] = 1$$

(iii)
$$A \subset B \Rightarrow P[A \mid C] \le P[B \mid C]$$

(iv)
$$P[A \cup B \mid C] = P[A \mid C] + P[B \mid C]\,P[A \cap B \mid C]$$

(v) إذا مثلت B_1 ،... ،B_k تقسيماً لفضاء عينة S، وكان A أحد أحداث S فإن :

$$\sum_{j=1}^{k} P(B_j \mid A) = 1$$

ويمكن ملاحظة ذلك، إما باستخدام نظرية بييز، حيث

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)\,P(B_j)}{P(A)} \quad ,\ j = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} P(B_j \mid A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)\,P(B_j) = 1$$

لأن $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)\,P(B_j)$ (من نظرية الاحتمال الكلي)،

أو مباشرة باستخدام خصائص التقسيم إذ أن $S=\bigcup_{j=1}^{k} B_j$ حيث B_1، ...، B_k تكون متنافية، لذلك فإن :

$$1=P(S|A)=P\left[\bigcup_{j=1}^{k} B_j|A\right]=\sum_{j=1}^{k}P\left[B_j|A\right]$$

وبرهان الخصائص (i) إلى (iv) بسيط يمكن للطالب أن يثبت هـذه الخـصائص بنفسه.

مثال (1.24) : للإجابة على سؤال من الأسئلة ذات الأجوبة المتعددة، فإن الطالب إما أن يعرف الإجابة باحتمال p أو أنه يخمن الإجابة باحتمال 1-p.

فإذا كان احتمال أن يكون تخمين الطالب صحيحاً هو $\frac{1}{m}$ حيث m هو عدد بدائل الإجابة لكل سؤال، ما هو احتمال أن يكون الطالب قد عرف الإجابة الصحيحة إذا كان قد أجاب إجابة صحيحة؟

الحل : إفرض أن A = الطالب أجاب إجابة صحيحة.

B = الطالب قد عرف الإجابة الصحيحة.

فيكون المطلوب هو حساب : $P(B\mid A)$

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A|B)\,P(B)+P(A|B^c)\,P(B^c)}$$

$$P(B)=p,\ P(B^c)=1-p,\ P(A|B)=1,\ P(A|B^c)=\frac{1}{m}$$

لذلك فإن :

$$P(B|A)=\frac{(1)\,(p)}{(1)\,(p)+\left(\frac{1}{m}\right)(1-p)}=\frac{m\,p}{1+(m-1)\,p}$$

فإذا كانت $m = 5$ بدائل إجابة لكل سؤال وكان $p = \frac{1}{2}$ مثلاً، فإن احتمال أن يكون الطالب قد عرف الإجابة الصحيحة لسؤال كان قد أجاب عنه إجابة صحيحة $= \frac{5}{6}$.

مثال (1.25) : احتمال أن يكشف اختبار أن شخصاً مصاب بالسرطان حينما يكون بالفعل مصاباً بالسرطان هو 0.9، واحتمال أن لا يكشف الاختبار أن الشخص مصاب بالسرطان وهو بالفعل غير مصاب بالسرطان هو 0.9. بافتراض أن احتمال أن يكشف الاختبار أن الشخص مصاب بالسرطان هو 0.003، ما هو احتمال أن يكشف الاختبار أن الشخص مصاب بالسرطان إذا كان بالفعل مصابا بالمرض؟

الحل : إفرض أن B = يكشف الاختبار أن الشخص مصاب بالسرطان.

A = الشخص بالفعل مصاب بالسرطان.

فيكون المطلوب هو حساب $P(B \mid A)$ ومن نظرية بييز :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\,P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)}$$

$$= \frac{(0.9)\,(0.003)}{(0.9)(0.003) + (0.1)(0.997)} = 0.0264$$

علماً بأن : $P(A \mid B) = 0.9$، $P(A \mid B^c) = 0.1$

$P(B) = 0.003$، $P(B^c) = 0.997$

(1.4) استقلال الأحداث Independence of Events

لاحظنا فيما سبق أنه على وجه العموم لا يكون الاحتمال المشروط $P(A \mid B)$ مساوياً الاحتمال الكلي $P(A)$. أي أن معرفة وقوع الحدث B يؤثر على احتمال وقوع الحدث A. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $P(A \mid B) = P(A)$ (أي أن وقوع B من عدمه لا يؤثر على احتمال وقوع A) فإننا نقول إن الحدثين A، B

يكونان مستقلين، ونظراً لأن $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، لذلك فإن A، B يكونـــان مستقلين إذا تحقق الشرط : $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$.

تعريف (1.6) : سنقول إن الحدثين A، B يكونان مستقلين إذا تحقق الشرط :

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

مثال (1.26) : دحرجت زهرتا نرد متوازنتين. إذا كان A = مجموع العددين على الزهرتين يساوي 7، B = العدد الذي يظهر على الزهرة الأولى هـــو 4. هل A، B مستقلان؟

وإذا تغير الحدث A ليصبح A = مجموع العددين على الزهـــرتين يساوي 6 مثلاً فهل مازال A، B مستقلين؟

الحل :

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$
$$A\cap B=\{(4,3)\}$$
$$\Rightarrow\ P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$
$$\Rightarrow\ P(A\cap B)=\frac{1}{36}=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=P(A)\,P(B)$$

الحدثان A، B مستقلان.

وإذا أصبح $A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

فإن : $P(A)=\dfrac{5}{36},\ \ A\cap B=\{(4,2)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$

وفي هذه الحالة يكون $P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}\neq\left(\dfrac{5}{36}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)=P(A)\,P(B)$

لذلك فإن الحدثين A، B لا يكونان مستقلين في هذه الحالة.

مثال (1.27) : إذا كان A، B مستقلين، فاثبت أن A^c ، B^c يكونان أيضاً مستقلين.

الحل :

$$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [\, P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,]$$

ويمكن كتابة $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ ، لأن الحدثين A، B مستقلان.

لذلك فإن :

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\, P(B)$$
$$= P(A^c) - P(B)\,(1 - P(A))$$
$$= P(A^c) - P(B)\, P(A^c)$$
$$= P(A^c)\,(1 - P(B))$$
$$= P(A^c)\, P(B^c)$$

أي أن A^c ، B^c يكونان أيضاً مستقلين.

مثال (1.28) : في تجربة إلقاء عملة مرتين (أو عملتين مرة واحدة) يكون ظهور الصورة أو الكتابة على إحدى العملتين مستقلاً عن ظهور الصورة أو الكتابة على العملة الأخرى، فإن كانت العملة متزنة أي $P\{H\} = P\{T\} = \frac{1}{2}$ فإن كل عنصر من عناصر فضاء العينة $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ يكون له نفس الاحتمال وقدره $\frac{1}{4}$، ذلك لأنه في حالة الاستقلال يكون ـــ على سبيل المثال ـــ

$$P\{(H, H)\} = P\{H\}\, P\{T\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

وهكذا بالنسبة إلى العناصر الأخرى، وتكون لعناصر فضاء العينة احتمالات متساوية هي $\frac{1}{4}$. وأما إذا لم تكن العملة متزنة ولنفرض أن $P\{H\} = \frac{1}{3}$، فيكون $P\{T\} = \frac{2}{3}$، ويكون لعناصر فضاء العينة احتمالات غير متساوية كالآتي :

$$P\{(H,H)\}=P\{H\}P\{H\}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$
$$P\{(H,T)\}=P\{H\}P\{T\}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9},$$
$$P\{(T,H)\}=P\{T\}P\{H\}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$
$$P\{(T,T)\}=P\{T\}P\{T\}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

لذلك فإنه يكون من الضروري في مثل هذه التجارب معرفة اتزان العملة **(أو الزهرة)** من عدمه قبل تقرير تساوي عناصر فضاء العينة.

ملاحظات :

(1) إستقلال حدثين لا يستلزم تنافيهما كما أن تنافي حدثين لا يستلزم استقلالهما. ولعلنا نلاحظ أن حدثين متنافيين يكونان مستقلين إذا كان وإذا كان فقط أي من الحدثين يقع باحتمال وقدره صفر. ذلك لأنه إذا كان A، B متنافيين، فإن $A\cap B=\phi \Leftarrow P(A\cap B)=0$. ويكون الحدثان A, B مستقلين، إذا كان وإذا كان فقط $P(A)\,P(B)=P(A\cap B)=0$، وهذا يحتم أن يكون $P(A)=0$ أو $P(B) = 0$.

مثال (1.29) : يبين أن تنافي حدثين لا يستلزم استقلالهما.

في تجربة إلقاء عملة متوازنة مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S=\{H,T\}$. إذا اعتبرنا $A=\{H\}$، $B=\{T\}$، فإن A، B يكونان متنافيين لأن $A\cap B=\phi$، بينما A، B لا يكونان مستقلين لأن :

$$P(A\cap B)=0\neq\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=P(A)\,P(B)$$

مثال (1.30) : يبين أن استقلال حدثين لا يستلزم تنافيهما.

يحتوي صندوقان على عدد الكرات المبين

	B	W	B	W
	5	4	3	6
	II		I	

إذا سحبنا كرة من كل صندوق، واعتبرنا

أن A = كرة بيضاء من صندوق I، C =كرة بيضاء من صندوق II، فإن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من كل من الصندوقين بيضاوتين هو

$P(A \cap C) = \left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = P(A)\,P(C)$ ، لذلك فإن A، C يكونان مستقلين.

ولكن $A \cap C = \{$(كرة بيضاء من صندوق I، كرة بيضاء من صندوق II)$\} \neq \phi$

لذلك فإن A، C لا يكونان متنافيين.

(2) هناك حالات يمكن فيها إيجاد علاقات بين الاحتمال الكلي والاحتمال المشروط لحدث :

(i) $A \cap B = \phi \Rightarrow P(B|A) \leq P(B)$

أي أنه إذا كانت الأحداث متنافية فإن الاحتمال المشروط لا تزيد قيمته عن الاحتمال الكلي.

(ii) $A \subset B \Rightarrow P(B|A) \geq P(B)$.

أي أن الاحتمال المشروط لا تقل قيمته عن الاحتمال الكلي إذا كان الشرط جزءاً من هذا الحدث.

(iii) $B \subset A \Rightarrow P(B|A) \geq P(B)$.

أي أن الاحتمال المشروط لا تقل قيمته عن الاحتمال الكلي لحدث إذا كان الحدث جزءاً من الشرط.

(3) يمكن تعميم مفهوم استقلال حدثين إلى أي عدد من الأحداث، فمثلاً سنقول إن A، B، C أحداث مستقلة ثنائياً إذا حققت الشروط الآتية جميعاً

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,,\ P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(A \cap C) = P(B)\,P(C)\,,\ \ P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

وعلى وجه العموم فإن الأحداث A_1 ، ... ، A_n تكون مستقلة ثنائياً إذا كان وإذا كان فقط لكل $k = 2$ ، 3 ، ... ، n

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

(لاحظ أنه يوجد عدد وقدره $(2^n - n - 1)$ من الشروط).

مثال (1.31) : إفرض أنه من بين كل ستة مسامير يوجد اثنان أقصر من الطـــول المطلوب. فإذا اختير مسماران عشوائياً، فما هو احتمـــال اختيـــار المسمارين القصيرين.

الحل : إفرض أن A_i = المسمار i قصير $(i = 1, 2)$ فيكون المطلوب هو حساب $P(A_1 \cap A_2)$. الحل الصحيح هو :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)\,P(A_1) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{15}.$$

الحل **غير الصحيح** هو الذي نحصل عليه بكتابة أن :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)\,P(A_1) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{15}.$$

والنقطة هي أنه على الرغم من صحة الجواب، إلا أن كتابة أن $P(A_2) = \frac{1}{5}$ غير صحيح لأن الصحيح هو أن $P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{5}$. ولحساب $P(A_2)$ ، فإن :

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1)\,P(A_1) + P(A_2 \mid A_1^c)\,P(A_1^c)$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

تمــــارين (1)

(1) أكتب فضاء العينة المناسب لكل من التجارب الآتية :

(i) قذف ثلاث عملات نقود.

(ii) إختيار قطعة من إنتاج مصنع ينتج ما هو جيد وما هو معيب.

(iii) عمل دراسة شاملة للعائلات وتسجيل الجنس للأطفال.

(iv) سحب ورقة لعب من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة).

(v) كيس I يحتوي على كرة سوداء وكرتين بيضاوين وكيس II يحتــوي على كرتين سوداوين وكرة بيضاء. تتكون التجربة من اختيار الكيس أولاً ثم سحب كرة من الكيس المختار.

(2) في فضاء العينة (iv) من المسألة السابقة، عين المجموعــات الجزئيــة التــي تعرف الأحداث الآتية :

(i) الورقة المسحوبة من النوع الديناري.

(ii) الورقة المسحوبة هي ولد أو بنت أو شايب.

(iii) الورقة المسحوبة هي الواحد القلب.

(3) في تجربة دحرجة زهرتي نرد مرة واحدة (إحداهما خضراء والأخرى حمراء)، إذا مثلت A الحدث "مجموع الأعداد التي على الوجهين زوجي"، B الحــدث "العدد الظاهر على الزهرة خضراء فردي"،

(i) أكتب أعضاء الحدثين A، B.

(ii) أكتب أعضاء الحدث $(A \cap B)$.

(iii) كم من أعضاء فضاء العينة S يوجد في الحدث $A \cap B$.

(4) إعتبر فضاء العينة (v) في السؤال الأول. إفرض أن A تمثل الحدث "كيس I هو الكيس المختار"، B تمثل الحدث "كرة بيضاء هي التي سحبت". إوصف وصفاً كلامياً كل من الأحداث الآتية ثم اكتب أعضاء كل منهم :

(i) $A \cap B$, (ii) A^c (iii) $A^c \cap B$, (iv) B^c (v) $A \cup B$.

(5) إذا كانت : $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، فاحسب قيمة احتمال وقوع واحد على الأقل من الحدثين (أي احسب : $P(A \cup B)$).

(6) "القاعدة الثالثة" (صفحة 8) تعطينا احتمال وقوع واحد من الحدثين A أو B على الأقل. والآتي يعطينا احتمال وقوع واحد من الحدثين A أو B بالضبط. إثبت أن :

$$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$$

(7) إفرض أن : $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.5$. إحسب قيمة :

(i) $P(A^c \cap B^c)$, (ii) $P(B \cap A^c)$, (iii) $P(A \cap B^c)$,
(iv) $P(A^c \cup B^c)$.

(8) دحرجت زهرتا نرد متزنتين مرة واحدة. أوجد احتمال وقوع الأحداث الثلاثة الآتية :

A = الأوجه الظاهرة لا يكون مجموعها 4.

B = ناتج أحد الأوجه هو على الأقل 3.

C = مجموع ما ينتج على الأقل 3.

(9) سحبت ورقة من أوراق اللعب، إذا كانت A تمثل الحدث "الورقة المسحوبة هي واحد"، B تمثل الحدث "الورقة المسحوبة هي ورقة ديناري"،

(i) هل A، B متنافيان؟

(ii) أوجد احتمال وقوع واحد على الأقل من الحدثين A أو B.

(10) يحتوي صندوق على كرة بيضاء وثلاث كرات سوداء، وأربع كرات خضراء.

(i) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء تليها كرة خضراء (بدون إعادة الأولى إلى الصندوق)؟

(ii) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء تليها كرة خضراء (بإعادة الأولى إلى الصندوق)؟

(11) إذا مثل A، B حدثان بحيث أن: $P(A)=p_1$، $P(B)=p_2$، $P(A\cap B)=p_3$

أكتب الاحتمالات الآتية بدلالة p_1، p_2، p_3 :

(i) $P(A^c \cup B^c)$, (ii) $P(A^c \cap B)$,

(iii) $P(A^c \cup B)$, (iv) $P(A^c \cap B^c)$.

(12) إذا كانت الأحداث A، B، C بحيث أن :

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=P(C\cap B)=0,\ P(A\cap C)=\frac{1}{8},$$

فاحسب احتمال وقوع واحد على الأقل من الأحداث A أو B أو C.

(13) إفرض أن A، B حدثان من أحداث تجربة معينة، فإذا كان :

$$P(A)=0.4\ ،\ P(B)=\alpha\ ،\ P(A\cup B)=0.7$$

(i) ما هي قيمة α التي تجعل A، B متنافيين؟

(ii) ما هي قيمة α التي تجعل A، B مستقلين؟

(14) إثبت أن : $P(A\cap B\cap C)=P(A\,|\,B\cap C)\,P(B\,|\,C)\,P(C)$

وعموماً أن : $P\left[\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right]=P(A_1)\prod_{j=2}^{k} P\left[A_j \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i\right]$

(15) كيسان I، II يحتويان على عدد الكرات بالشكل. سحب كيس عشوائياً، ثم أخذت

	W	B	W	B
	6	4	5	5
	II		I	

من هذا الكيس كرتان واحدة تلو الأخرى بدون إعادة الأولى إلى الكيس. ما هو احتمال أن تكون الكرتان المأخوذتان لهما نفس اللون؟

(16) كيسان I، II يحتويان على عدد الكرات المبين بالشكل. سحبت كرة من كيس I عشوائياً ووضعت في كيس II، ثم سحبت كرة عشوائياً من كيس II. ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء؟

W	B		W	B
m_1	n_1		m_2	n_2
I			II	

(17) إثبت أن : $P(A)+P(B)-1 \leq P(A \cap B) \leq P(A)+P(B)$

(18) إذا كان الحدثان A، B متنافيين، وكان $P(A) = 0.37$، $P(B) = 0.44$ فاحسب :

(a) $P(A^c)$, (b) $P(B^c)$, (c) $P(A \cup B)$,

(d) $P(A \cap B)$, (e) $P(A \cap B^c)$, (f) $P(A^c \cap B^c)$.

(19) إذا كان : $P(A) = 0.59$ ، $P(B) = 0.30$، $P(A \cap B) = 0.21$. إحسب :

(a) $P(A \cup B)$, (b) $P(A \cap B^c)$, (c) $P(A^c \cup B^c)$,

(e) $P(A^c \cap B^c)$.

(20) إثبت أن الاحتمال المشروط يحقق مسلمات الاحتمالات الثلاث، أي أثبت أنه إذا كان $P(B) > 0$ فإن :

(1) $P(A|B) \geq 0$, (2) $P(B|B) = 1$,

(3) $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

لأي متتابعة للأحداث المتنافية A_1، A_2، ...

(21) إذا أعطيت الأحداث الثلاثة A، B، C بحيث أن $P(A \cap B \cap C) \neq 0$، $P(C \mid A \cap B) = P(C \mid B)$، فاثبت أن : $P(A \mid B \cap C) = P(A \mid B)$.

(22) إذا كانت الأحداث A، B، C مستقلة، فأثبت أ ن :

(i) A، $(A \cap B)$ يكونان مستقلين.

(ii) A، $(A \cup B)$ يكونان مستقلين.

(iii) A^c، $(A \cap C^c)$ يكونان مستقلين.

(23) تبعث 25 في المائة من السيارات في إحدى المدن كميات كبيرة من الملوثات لهواء المدينة. فإذا فشلت السيارات في اجتياز اختبار انبعاث الملوثات بكميات كبيرة باحتمال وقدره 0.99، وأن سيارة لا ينبعث منها ملوثات بكميات كبيرة تفشل أيضاً في هذا الاختبار باحتمال وقدره 0.17. ما هو احتمال أن سيارة تفشل في الاختبار هي تبعث في الحقيقة ملوثات بكميات كبيرة؟

(24) يعمل في ثلاثة مصانع A، B، C عدد من الموظفين هم على الترتيب 50، 75، 100 فإذا كان 50%، 60%، 70% من هؤلاء الموظفين (على الترتيب) من النساء، وإذا افترضنا أن الاستقالة يكون لها نفس الاحتمال بالنسبة إلى النساء أو الرجال سواء، وأن إحدى الموظفات قد استقالت، فما احتمال أن تكون من العاملات في مصنع C؟

(25) إثبت أنه إذا كان A، B مستقلين، فإن :

(a) A، B^c يكونان مستقلين، (b) A^c، B يكونان مستقلين.

(26) دحرجت زهرتا نرد متزنتين. إذا علمت أن الوجهين يظهران عددين مختلفين، فما احتمال أن يكون أحد الوجهين 4؟

(27) تتلخص صلاحية اختبار أشعة إكس في الكشف عن مرض السل في الآتي :

من بين الناس الذين يحملون مرض السل يكشف اختبار الأشعة عن 90% من الحالات بينما 10% منها لا تكشف عنه الأشعة.

من بين الناس الذين لا يحملون المرض، يكشف اختبار الأشعة عن أن 99% منهم لا يحملون المرض بينما 1% منهم يحملونه.

فإذا اختبر شخص من بين تعداد كبير من الناس فيهم 0.1% يحملون سلا، وكشفت الأشعة عن أنه يحمل المرض، فما هو احتمال أن يكون هذا الشخص مريضاً بالفعل بمرض السل؟

الباب الثاني

المتغيرات العشوائية، ودوال الكتلة والكثافة والتوزيع

سنقدم في هذا الباب عرضاً لمفهوم "المتغير العشوائي" وهو مفهوم على درجة كبيرة من الأهمية إذ أنه يمثل الأساس الذي تنبني عليه نظرية التوزيعات والإحصاء عموماً سواء كان ذلك من ناحية العينات أو الاستدلال أو غير ذلك، إذ أن بداية الحديث يكون عادة عن المتغيرات العشوائية.

سنقدم أيضاً مفاهيم دوال الكتلة والكثافة والتوزيع (التي يطلق عليها أحياناً "القانون الاحتمالي") بصفة عامة ودراسة خصائص هذه الدوال.

(2.1) المتغيرات العشوائية

تعريف (2.1) المتغير العشوائي Random Variable

المتغير العشوائي **دالة** معرفة على فضاء العينة S (أي أن نطاقها هو فضاء العينة S) وتنقل نقط فضاء العينة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزء منها.

ويرمز ـ عادة ـ للمتغير العشوائي بالرموز الكبيرة لآخر الحروف الأبجدية مثل U، V، W، X، Y، Z، ...

S
X
R
s
x

وأما الرموز الصغيرة لهذه الحروف فتعبر عن "قيمة" المتغير العشوائي.

فنكتب : $X: S \to R$ ، حيث $X(s) = x$ ، $s \in S$، $x \in R$، R هو خط الأعداد الحقيقية.

مثال (2.1) : في مثال إلقاء قطعة نقود متوازنة مرتين، رأينا أن فضاء العينة S هو : $S = \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, H), (T, T) \}$.

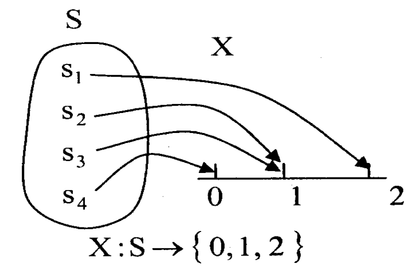
إذا مثلت المتغيرات العشوائية X، Y، Z الأحداث الآتية :

X = عدد الصور الناتجة.

Y = عدد الصور – عدد الكتابة.

Z = | الفرق بين عدد الصور وعدد الكتابة |

وإذا رمزنا لعناصر فضاء العينة بالرموز $s_1 = \{(H,H)\}$ ، $s_2 = \{(H,T)\}$ ، $s_3 = \{(T,H)\}$ ، $s_4 = \{(T,T)\}$ ، فإن المتغير العشوائي X ينقل نقط فضاء العينة S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\{0,1,2\}$ ذلك لأن :



$$X(s_1) = X\{(H,H)\} = 2$$
$$X(s_2) = X\{(H,T)\} = 1$$
$$X(s_3) = X\{(T,H)\} = 1$$
$$X(s_4) = X\{(T,T)\} = 0$$

وينقل المتغير العشوائي Y نقط فضاء العينة S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\{-2,0,2\}$ لأن :

S Y s_1 s_2 s_3 s_4 -2 0 2

$Y:S \to \{-2,0,2\}$

$$Y(s_1) = Y\{(H,H)\} = 2$$
$$Y(s_2) = Y\{(H,T)\} = 0$$
$$Y(s_3) = Y\{(T,H)\} = 0$$
$$Y(s_4) = Y\{(T,T)\} = -2$$

وينقل المتغير العشوائي Z نقط فضاء العينة S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\{0,2\}$ لأن :

S Z s_1 s_2 s_3 s_4 0 2

$Z:S \to \{0,2\}$

$$Z(s_1) = Z\{(H,H)\} = 2$$
$$Z(s_2) = Z\{(H,T)\} = 0$$
$$Z(s_3) = Z\{(T,H)\} = 0$$
$$Z(s_4) = Z\{(T,T)\} = 2$$

فإذا كانت العملة متزنة (أي أن احتمال ظهور الصورة H هو نفس احتمال ظهـور الكتابة T هو $\frac{1}{2}$ ، أي $P\{H\} = P\{T\} = \frac{1}{2}$)، فإن عناصر فضاء العينة تكون ذات احتمالات متساوية وكل منها $\frac{1}{4}$، أي أن: $P(s_1) = P(s_2) = P(s_3) = P(s_4) = \frac{1}{4}$، وعلى ذلك فيمكننا كتابة احتمالات الأحداث التي يمثلها المتغير العشوائي X كالآتي:

$$P[X=0] = P[X(s_4)=0] = P[X\{T,T\}] = \frac{1}{4},$$

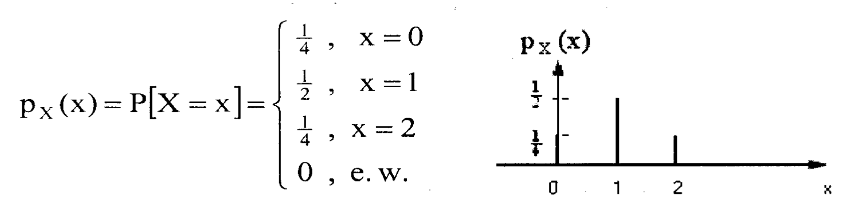
$$P[X=1] = P[X(s_2)=1 \text{ or } X(s_3)=1] = P[X\{(H,T)\} \cup \{(T,H)\}]$$

$$= P\{(H,T)\} + P\{(T,H)\} = \frac{1}{2},$$

$$P[X=2] = P[X(s_1)=2] = P\{(H,H)\} = \frac{1}{4},$$

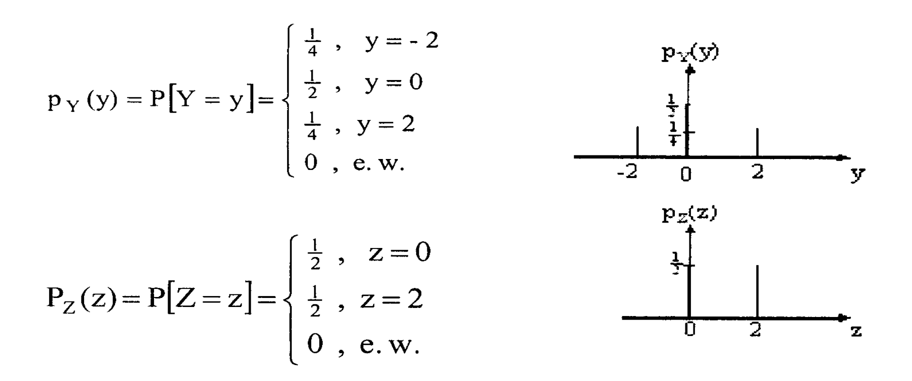
ونلخص هذه الاحتمالات الثلاثة في الصورة :

$$p_X(x) = P[X=x] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x=0 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \\ \frac{1}{4}, & x=2 \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$



[سنستخدم .e. w (اختصار else where) لتعني "غير ذلك"، ففي هذا المثال يكون المقصود بالعبارة $p_X(x) = 0$, e. w. أن الكتلة $p_X(x)$ تكون مساوية للصفر لأي قيم x غير 0، 1، 2].

وبالمثل يمكننا كتابة الاحتمالات للمتغيرين العشوائيين Y، Z كالآتي :



$$p_Y(y) = P[Y=y] = \begin{cases} \frac{1}{4}\ , & y=-2 \\ \frac{1}{2}\ , & y=0 \\ \frac{1}{4}\ , & y=2 \\ 0\ , & \text{e.w.} \end{cases}$$

$$P_Z(z) = P[Z=z] = \begin{cases} \frac{1}{2}\ , & z=0 \\ \frac{1}{2}\ , & z=2 \\ 0\ , & \text{e.w.} \end{cases}$$

(2.2) دالة الكتلة الاحتمالية

تعريف (2.2) : سنقول إن الدالة $p_X(x) = P[X=x]$ تمثل **دالة كتلة احتمالية** (probability mass function) إذا توفر فيها الشرطان الآتيان :

(1) $\quad p_X(x) \geq 0\ ,\quad$ لجميع قيم x

(2) $\quad \sum_x p_X(x) = 1$

ويكون نطاق تعريف الدالة $p_X(x)$ إما محدوداً أو يمكن عده (countable).

ملاحظات :

(1) الحكمة من تعريف المتغير العشوائي هي في التعامل مع دالة في متغير حقيقي بدلاً من التعامل مع دالة معرفة على مجموعة، إذ أن المألوف (والأسهل) التعامل مع دالة $p_X(x)$ (أو $f_X(x)$) في المتغير الحقيقي x بدلاً من التعامل مع الدالة P(A) المعرفة على المجموعة A، وسنعطي العلاقة بين الدالتين فيما بعد. ومثال على هذه العلاقة هو إذا اعتبرنا أن A = ظهور صورة واحدة فقط في المثال الذي فيه دالة الكتلة الاحتمالية هي :

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & e.w. \end{cases}$$

فإن : $P(A) = P[X = 1] = \frac{1}{2}$

وكذلك $P(A) = P\{ (H, T), (T, H) \} = \frac{1}{2}$.

(2) تكون دالة الكتلة الاحتمالية معرفة على قيم المتغير العشوائي المنفصل X، فيكون نطاق دالة الكتلة الاحتمالية مكونا من قيم غير متصلة للمتغير العشوائي X.

(3) الدوال المعرفة في المثال السابق للمتغيرات العشوائية X، Y، Z تمثل دوال كتلة احتمالية إذ أنها تحقق شرطي دالة الكتلة من ناحية أن "الكتل" غير سالبة لجميع قيم المتغير العشوائي، وأن مجموع هذه الكتل يساوي الواحد الصحيح.

(2.3) دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف (2.3) : سنقول إن الدالة $f_X(x)$ تمثل **دالة كثافة احتمالية** (probability density function) إذا توفر فيها الشرطان الآتيان :

(1) $f_X(x) \geq 0$, لجميع قيم x

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

ويكون نطاق تعريف دالة الكثافة الاحتمالية متصلا، ونقول إن المتغير العشوائي X في هذه الحالة متغير متصل.

ويمكن كتابة دالة كتلة احتمالية أو دالة كثافة احتمالية طالما حققت الشرطين في أي من التعريفين (2.2)، (2.3) على الترتيب، فيمكننا كتابة دالة كتلة كما في المثال الآتي :

مثال (2.2) : الدالة $p_X(x)$ المعطاة، تمثل دالة كتلة احتمالية لأن الكتل جميعها غير سالبة، ومجموع الكتل يساوي 1.

$$p_X(x)=\begin{cases} 0.2 & , x=-3 \\ 0.3 & , x=-1 \\ 0.1 & , x=0 \\ 0.1 & , x=1 \\ 0.2 & , x=2 \\ 0.1 & , x=5 \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

كما يمكننا وضع دالة كثافة احتمالية كما في المثال الآتي :

مثال (2.3) : أي دالة غير سالبة على نطاق تعريف معين يمكنها أن تمثل دالة كثافة احتمالية تحتاج أحياناً إلى ضبطها (بجعل التكامل مساوياً الواحد) حتى تكون كثافة احتمالية.

فمثلا الدالة : $$g(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+1 & , 1<x<2 \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

غير سالبة لجميع قيم x، والتكامل على نطاقها هو :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{1} + \int_{1}^{2} + \int_{2}^{\infty} \\ &= \int_{1}^{2} \left(3x^2-2x+1\right)dx \\ &= x^3-x^2+x\Big|_{1}^{2} = 5 \end{aligned}$$

فإذا قسمنا طرفي المعادلة على 5، فإن : $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)g(x)\,dx=1$ ، لذلك فإن

$\frac{1}{5}g(x)$ تمثل كثافة احتمالية.

فإذا كتبنا $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\left(3x^2-2x+1\right), & 1<x<2\\ 0 & , e.w.\end{cases}$ فإن $f_X(x)$ تمثل دالـــة كثافة احتمالية.

(2.3.1) الدالة الاحتمالية لحدث وعلاقتها بدالة الكتلة أو الكثافة

ذكرنا أن من أهم أسباب تعريف المتغير العشوائي هو نقل فضاء العينة S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية لتكون نطاقاً لدوال (الكتلة والكثافة) حيـــث التعامـــل معها أكثر ألفة من التعامل مع دوال في مجموعة (الدوال الاحتمالية)، وبـــديهي — والحال كذلك — أن تكون هناك علاقة بين دالة الكتلـــة أو الكثافـــة وهـــذه الدالـــة الاحتمالية فإذا مثلت $P(A)$ الدالة الاحتمالية لحدث A فإن علاقتهـــا بدالـــة الكتلـــة الاحتمالية $p_X(x)$ هي :

$$P(A)=\sum_{x\in A}p_X(x)\ . \qquad (2.1)$$

كما أن علاقة الدالة الاحتمالية $P(A)$ للحدث A بدالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ هي :

$$P(A)=\int_A f_X(x)\,dx\ . \qquad (2.2)$$

وأحياناً ما تؤخذ العلاقة (2.2) على أنها تعريف لدالة الكثافة الاحتماليـــة $f_X(x)$، فيقال أن $f_X(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X إذا تحققت العلاقـــة (2.2) لأي حدث A.

(2.3.2) حساب الاحتمالات باستخدام دوال الكتلة أو الكثافة

مثال (2.4) : إذا أعطيت دالة الكتلة الاحتمالية في مثال (2.2) ، وإذا علمت أن $A=\{x\mid 0\le x<6\}$، $B=\{x\mid -2<x\le 2\}$ ، فاحسب :

(i) $P(A)$, (ii) $P(B)$, (iii) $P(A \cap B)$,

(iv) $P(A \mid B)$, (v) $P(B \mid A)$.

الحل :

(i) $P(A) = \sum_{x \in A} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(5) = 0.5$.

(ii) $P(B) = \sum_{x \in B} p_X(x) = p_X(-1) + p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 0.7$.

(iii) $A \cap B = \{ x \mid 0 \le x \le 2 \} \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = \sum_{x \in A \cap B} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 0.4.$$

(iv) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.4}{0.7} = \dfrac{4}{7}$.

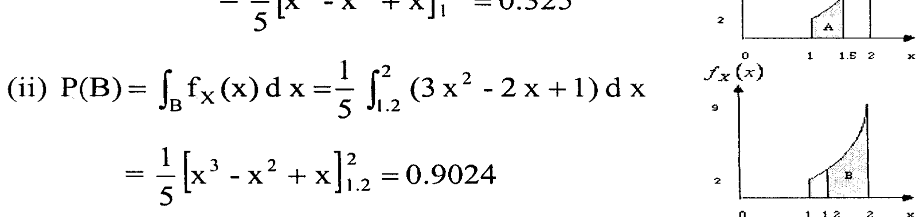
(v) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.4}{0.5} = \dfrac{4}{5}$.

مثال (2.5) : إذا أعطيت دالة الكثافة الاحتمالية في مثال (2.3) ، وإذا كان الحدثان $A = \{ x \mid -1 < x < 1.5 \}$ ، $B = \{ x \mid 1.2 < x < 3 \}$ ، فاحسب :

(i) $P(A)$, (ii) $P(B)$, (iii) $P(A \cap B)$,

(iv) $P(A \mid B)$, (v) $P(B \mid A)$.

الحل :

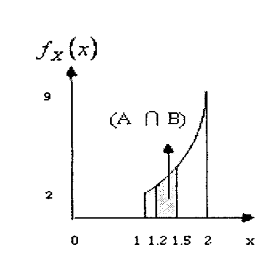


(i) $P(A) = \int_A f_X(x)\,dx = \dfrac{1}{5} \int_1^{1.5} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

$$= \frac{1}{5} \left[x^3 - x^2 + x \right]_1^{1.5} = 0.325$$

(ii) $P(B) = \int_B f_X(x)\,dx = \dfrac{1}{5} \int_{1.2}^{2} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

$$= \frac{1}{5} \left[x^3 - x^2 + x \right]_{1.2}^{2} = 0.9024$$



(iii) $A \cap B = \{ x \mid 1.2 < x < 1.5 \}$

$$P(A \cap B) = \int_{A \cap B} f_X(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{5} \left[x^3 - x^2 + x \right]_{1.2}^{1.5} = 0.2274$$

(iv) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.2274}{0.9024} = 0.2519 .$

(v) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.2274}{0.325} = 0.6997 .$

ملاحظات :

(1) الشرط الأول الذي يجب أن تحققه دالة الكتلة (أو الكثافة) يقول إن الكتل جميعها (أو منحنى دالة الكثافة) يجب أن تقع فوق المحور الأفقي.

والشرط الثاني — في حالة الكثافة — يقول إن المساحة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لابد وأن تساوي الواحد. فإن كانت المساحة تساوي عددا آخر (موجبا) غير الواحد، فإنه بالقسمة على هذا العدد يمكننا الحصول على دالة كثافة احتمالية بحيث تصبح المساحة تحت منحنى هذه الدالة مساوية الواحد.

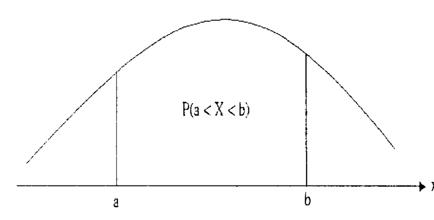
(2) إذا أعطيت دالة كتلة (أو كثافة)، وأعطي حدث A، فإنه يمكننا حساب P(A) باستخدام العلاقة (2.1) أو (2.2) حسب ما كان المتغير العشوائي X منفصلاً أو متصلاً على الترتيب.

(3) إذا اعتبرنا أن $A = \{ x \mid a < x < b \}$ ، فإنه باستخدام (2.2) نلاحظ أن :

$$P(a < x < b) = P(A) = \int_A f_X(x)\, dx = \int_a^b f_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a) \quad (2.3)$$

وهذا الاحتمال يمثل المساحة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية بـــين المـــستقيمين $x = a$، $x = b$.

والاحتمـــالات الأربعـــة : $P(a<X<b)$، $P(a \le X < b)$، $P(a < X \le b)$، $P(a \le X \le b)$ **تكون كلها متساوية** إذا كان المتغير العشوائي X متصلاً، وكثافته الاحتمالية هي $f_X(x)$ وقيمـــة أي منهـــا تعطى بالتكامل في (2.3)، ذلك لأن المساحة عند أي نقطة تكون مساوية للصفر.



(4) الاحتمالات الأربعة المذكورة في (3) **لا تكون متـــساوية** إذا كـــان المتغيـــر العشوائي X منفصلاً، وكانت إحدى نقطتي النهايتين نقطـــة عـــدم اتـــصال.

وعموماً فإن :

$$F_X(c) = P[X \le c] \qquad P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a),$$
$$p_X(a) = P[X = a] \qquad P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a),$$
$$P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a) - p_X(b),$$
$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - p_X(b)$$

وتمثل $p_X(c)$ القفزة عند c.

فإذا كان المتغير العشوائي X متصلاً فإن القفزة عند أي من a أو b تكون مساوية للصفر، أي أن $p_X(a) = p_X(b) = 0$، ونحصل بذلك على النتيجة في (3). وحتى إذا كان المتغير العشوائي X منفصلاً، وكانت الدالة $F_X(x)$ متصلة عنـــد a أو b فإننا نحصل أيضاً على النتيجة في (3). قيم الاحتمالات الأربعة الـــسابقة نحـــصل عليها عندما تكون a، b نقطتا عدم اتصال للدالة $F_X(x)$.

ولإثبات صحة هذه العلاقات الأربع، فإننا نعرف الأحداث A، B، C، D بالآتي :

$D=[X=b]$ ، $C=[X=a]$ ، $B=[X\le b]$ ، $A=[X\le a]$

$$P[a<X\le b]=P(B\cap A^c)=P(B)-P(A)=P[X\le b]-P[X\le a]$$
$$=F_X(b)-F_X(a).$$

$$P[a\le X\le b]=P[(B\cap A^c)\cup C]=P(B\cap A^c)+P(C)$$
$$=F_X(b)-F_X(a)+p_X(a)$$

$$P[a\le X<b]=P[(B\cap A^c\cap D^c)\cup C]=P(B\cap A^c\cap D^c)+P(C)$$
$$=P(B)-P(A)-P(D)+P(C)$$
$$=F_X(b)-F_X(a)+p_X(a)-p_X(b).$$

$$P[a<X<b]=P(B\cap A^c\cap D^c)=P(B)-P(A)-P(D)$$
$$=F_X(b)-F_X(a)-p_X(b).$$

مثال (2.6) : إذا خضع المتغير العشوائي X لدالة الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x<1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

فاحسب : $P\left[X\le\frac{1}{2}\,|\,\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right]$

الحل :

$$P\left[X\le\frac{1}{2}\,|\,\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right]=\frac{P\left[X\le\frac{1}{2},\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right]}{P\left[\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right]}$$
$$=\frac{P\left[\frac{1}{3}\le X\le\frac{1}{2}\right]}{P\left[\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right]}$$

ونلاحظ أن :

$$P[a\le X\le b]=\int_a^b f_X(x)\,dx$$
$$=\int_a^b 2x\,dx=b^2-a^2.$$

فيكون :

$$P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36},$$

$$P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

لذلك فإن :

$$P\left[X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right] = \left(\frac{5}{36}\right)(3) = \frac{5}{12}.$$

مثال (2.7) : إذا خضع المتغير العشوائي X لدالة الكتلة الاحتمالية في مثال (2.2)

فاحسب : (i) $P(-3 \le X < 1)$ (ii) $P(X > -1)$
(iii) $P(-3 \le X < 1 \mid X > 0)$

الحل :

$$\text{(i)}\ P(-3 \le X < 1) = F_X(1) - F_X(-3) + p_X(-3) - p_X(1)$$

$$= 0.7 - 0.2 + 0.2 - 0.1 = 0.6$$

لاحظ أيضاً أن :

$$P(-3 \le X < 1) = \sum_{x \in [-3,1)} P_X(x)$$

$$= p_X(-3) + p_X(-1) + p_X(0) = 0.6$$

$$\text{(ii)}\ P(X > -1) = 1 - P(X \le -1) = 1 - 0.5 = 0.5 .$$

$$\text{(iii)}\ P(-3 \le X < 1 \mid X > -1) = \frac{P(-3 \le X < 1, X > -1)}{P(X > -1)}$$

$$= \frac{P(-1 < X < 1)}{P(X > -1)} = \frac{1}{5}$$

(2.4) دالة التوزيع (التراكمية) Cumulative Distribution Function

تعريف (2.4) : سنقول إن الدالة $F_X(x)$ تمثل دالة توزيـــع (تراكميـــة) لمتغيـــر عشوائي X (متصل أو منفصل) إذا كانت : $F_X(x) = P[X \le x]$.

سنقصر الحديث عن دالة التوزيع ونقصد بها دالة التوزيع التراكمية لأنه لا يوجــد هناك دوال توزيع أخرى.

إذا اعتبرنا أن $A = [X \le x]$ فإنه باستخدام (2.1)، (2.2) يمكننا حساب دالة التوزيع عندما يكون X منفصلاً (وله دالة كتلة احتمالية $(p_X(x))$ أو متصلاً (وله دالة كثافة احتمالية $(f_X(x))$ كالآتي :

$$F_X(x) = \sum_{u \le x} p_X(u) \qquad (2.4)$$

حيث X متغير عشوائي منفصل، دالة كتلته الاحتمالية هي $p_X(.)$،

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,d\,u\,, \qquad (2.5)$$

حيث X متغير عشوائي متصل، دالة كثافته الاحتمالية هي $f_X(.)$

المقصود بالحدث $A = [X \le x]$ هو أن $A = \{ z \,|\, X(s) = z\,, z \le x \}$

ويكون منحنى دالة التوزيع $y = F_X(x)$ التي تقابل دالة كثافة احتمالية $f_X(x)$ متصلاً عند جميع النقط، ونقول إن دالة التوزيع في هذه الحالة دالة توزيع متصلة اتصالاً مطلقاً (absolutely continuous distribution)، وأما منحنى دالة التوزيع المقابلة لدالة كتلة احتمالية فيكون على صورة دالة سُلَّمية، ونقول عن دالة التوزيع في هذه الحالة إنها دالة توزيع متقطعة.

(discrete distribution function)

مثال (2.8) : إذا أعطيت دالة الكتلة الاحتمالية في مثال (2.2)، فاوجد دالة التوزيع المقابلة وارسمها ثم احسب : (i) $P[X < 0]$، (ii) $P(-1 \le X \le 2)$

الحل : باستخدام الصيغة (2.4)، فإن

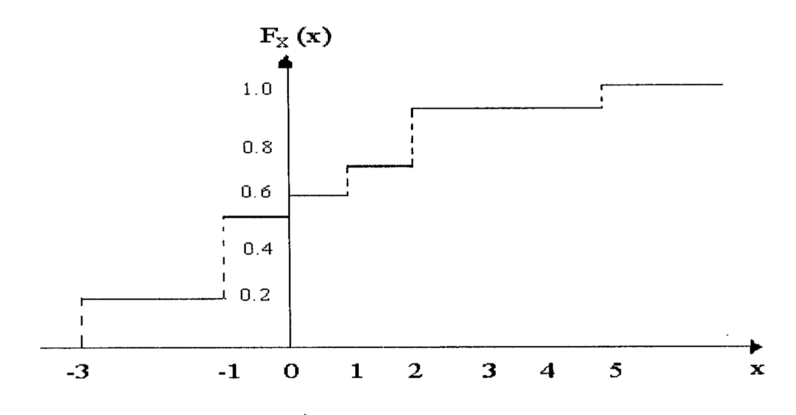
$$F_X(x) = \sum_{u \le x} p_X(x) = 0\,, x < -3$$

$$F_X(x) = \sum_{u \le x} p_X(x) = 0.2\,, \quad -3 \le x < -1$$

$$F_X(x) = \sum_{u \le x} p_X(x) = 0.5\,, -1 \le x < 0$$

وهكذا يمكن الحصول على بقية قيم $F_X(x)$ حيث تعطى هذه الدالة لجميع قيم

x كالتالي:



ولأننا نقوم بجمع الكتل الموجودة في دالة الكتلة الاحتمالية فقد سميت الدالة الناتجة دالة التوزيع (التراكمية).

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-3\\ 0.2 & , \quad -3\le x<-1\\ 0.5 & , \quad -1\le x<0\\ 0.6 & , \quad 0\le x<1\\ 0.7 & , \quad 1\le x<2\\ 0.9 & , \quad 2\le x<5\\ 1 & , \quad x>5\end{cases}$$

(i) $P[X<0]=P[X\le -1]=F_X(-1)=0.5$,

(ii) $P[-1\le X\le 2]=F_X(2)-F_X(-1)+p_X(-1)=0.9-0.5+0.3=0.7$.

ويمكن حساب هذا الاحتمال مباشرة باستخدام دالة الكتلة حيث :

$$P[-1\le X\le 2]=\sum_{x\in[-1,2]} p_X(x)=p_X(-1)+p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)=0.7$$

مثال (2.9) : أوجد دالة التوزيع المقابلة لدالة الكثافة الاحتمالية في مثال (2.3) وارسم منحنى دالة التوزيع ثم احسب :

$$\text{(i) } P\left[X < \frac{3}{2}\right] \text{ ، (ii) } P(1.2 < X < 1.8)$$

الحل :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(3x^2 - 2x + 1) & , 1 < x < 2, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

باستخدام تعريف دالة التوزيع في (2.5)، فإنه عندما $1 < x < 2$، تكون :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} + \int_{1}^{x}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{5}\int_1^x (3u^2 - 2u + 1)\,du = \frac{1}{5}\left[u^3 - u^2 + u\right]_1^x$$

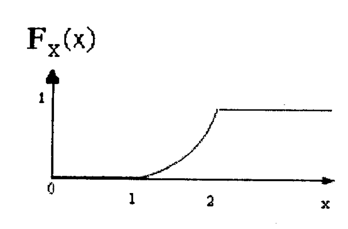
$$= \frac{1}{5}\left[x^3 - x^2 + x - (1 - 1 + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right]$$

لذلك فإن :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 1, \\ \frac{1}{5}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right] & , \quad 1 < x < 2, \\ 1 & , \quad x \ge 2. \end{cases}$$

وتكون :



$$\text{(i) } P\left(X < \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) = 0.325$$

(لاحظ أنه عندما يكون المتغير العشوائي X متصلاً، فإن : $P(X < a) = P(X \le a)$)

$$\text{(ii) } P(1.2 < X < 1.8) = F_X(1.8) - F_X(1.2)$$

$$= 0.6784 - 0.0976 = 0.5808$$

(2.4.1) خصائص دالة التوزيع (التراكمية)

أي دالة $F_X(x)$ تمثل دالة توزيع إذا توفرت فيها الشروط الآتية :

(1) الدالة $F_X(x)$ غير تناقصية لجميع قيم x ، أي أنه إذا كانت x_1 ، x_2 نقطتان في نطاق تعريف الدالة $F_X(x)$ فإن : $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(2) $$\lim_{x \to -\infty} [F_X(x)] = 0 \ , \ \lim_{x \to \infty} [F_X(x)] = 1$$

أي أن المستقيمين $y = 0$ ، $y = 1$ يمثلان خطان تقاربيان لمنحنى الدالة $y = F_X(x)$.

(3) الدالة $F_X(x)$ تكون متصلة من جهة اليمين، أي أن :

$$\lim_{x \to a^+} [F_X(x)] = F_X(a)$$

لجميع النقط $x = a$ في نطاق تعريف الدالة.

ملاحظات :

(1) دالة التوزيع المقابلة لدالة كثافة احتمالية تكون متصلة عند جميع النقط، وتزايدية تزايدا مطردا على طول نطاق التعريف.

(2) عند نقط عدم اتصال دالة التوزيع، فإنه يمكن حساب قيم القفزات وذلك بأخذ الفرق بين نهايتي دالة التوزيع عندما تؤول x إلى هذه النقطة من جهة اليمين (وهي تساوي قيمة الدالة) ومن جهة اليسار. فإذا كانت $x = a$ هي إحدى نقط عدم اتصال دالة التوزيع $F_X(x)$ وكانت $p_X(a)$ هي القفزة عند $x = a$، فإن :

$$\begin{aligned} p_X(a) &= P[X \leq a] - P[X < a] \\ &= F_X(a) - \lim_{x \to a^-} [F_X(x)] \\ &= F_X(a) - F_X(a-1) \end{aligned}$$

وهكذا يمكننا الحصول على دالة الكتلة الاحتمالية من دالة توزيع معطاة، وذلك بإيجاد الفروق (عند نقط عدم الاتصال) بين قيمة دالة التوزيع عند a مثلا ودالة التوزيع عند $(a - 1)$.

(3) إذا كانت دالة التوزيع $F_X(x)$ لمتغير عشوائي X متصلة عند جميع النقط في نطاقها فإن هذه الدالة تقابل دالة كثافة احتمالية هي في الواقع المشتقة الأولى لدالة التوزيع $F_X(x)$. ويكون منحنى دالة الكثافة الاحتمالية متصلاً عند جميع النقط باستثناء عدد محدد منها ، ونكتب :

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}\left[F_X(x)\right] ,$$

لجميع النقط التي تكون عندها الدالة $F_X(x)$ قابلة للاشتقاق.

أي أننا نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية من دالة توزيع معطاة بإيجاد المشتقة الأولى لدالة التوزيع.

ويمكن تلخيص الملاحظتين (2)، (3) في النظرية الآتية :

نظرية (2.1)

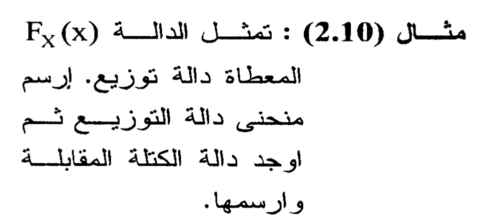
(أ) إذا مثلت F_X دالة توزيع لمتغير عشوائي متصل ذي كثافة احتمالية f_X، فإن :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left[F_X(x)\right]$$

لجميع النقط التي تكون عندها دالة التوزيع F_X قابلة للاشتقاق.

(ب) إذا مثلت F_X دالة توزيع لمتغير عشوائي منفصل X ذي كتلة احتمالية p_X. حيث يأخذ X القيم x، $x + 1$، $x + 2$، ... ، فإن :

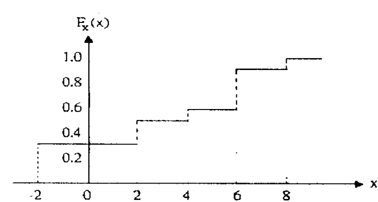
$$p_X(x) = P[X = x] = F_X(x) - F_X(x - 1)$$

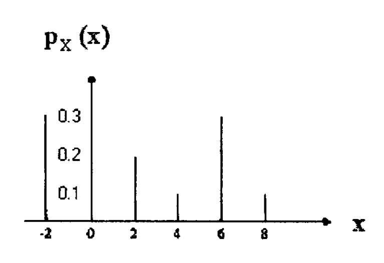


مثـــال (2.10) : تمثــل الدالـــة $F_X(x)$ المعطاة دالة توزيع. إرسم منحنى دالة التوزيـــع ثـــم اوجد دالة الكتلة المقابلـــة وارسمها.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -2 , \\ 0.3 & , \ -2 \le x < 2, \\ 0.5 & , \ 2 \le x < 4, \\ 0.6 & , \ 4 \le x < 6 \\ 0.9 & , \ 6 \le x < 8 \\ 1.0 & , \ x \ge 8 \end{cases}$$

الحل :
يمكن رسم منحنى الدالة كما هـــو مبـــين بالشكل. ودالة الكتلة المقابلة هي





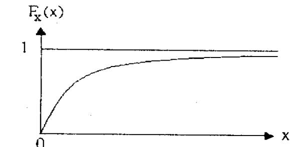
$$p_X(x) = \begin{cases} 0.3 , & x = -2 \\ 0.2 , & x = 2 \\ 0.1 , & x = 4 \\ 0.3 , & x = 6 \\ 0.1 , & x = 8 \\ 0 , & e.w. \end{cases}$$

ذلك لأن القفزات عند نقط عدم اتصال دالة التوزيع تمثل الكتل التي تحـــسب مـــن النظرية السابقة (أو من شكل منحنى دالة التوزيع) كالآتي :

$$p_X(-2) = F_X(-2) - F_X(-3) = 0.3 - 0 = 0.3$$
$$p_X(2) = F_X(2) - F_X(1) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$
$$p_X(4) = F_X(4) - F_X(3) = 0.6 - 0.5 = 0.1$$
$$p_X(6) = F_X(6) - F_X(5) = 0.9 - 0.6 = 0.3$$

$$p_X(8) = F_X(8) - F_X(7) = 1 - 0.9 = 0.1$$

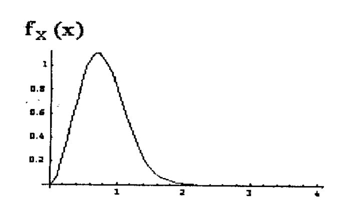
مثال (2.11) : إذا مثلت $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-2x^3} & , x > 0 \end{cases}$ دالـــة توزيـــع لمتغيـــر عشوائي X فارسم منحنى هذه الدالة ثم أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة $f_X(x)$ وارسمها.



الحل : منحنى دالة التوزيع $F_X(x)$ يأخذ الصورة المبينة في الشكل.

ودالة الكثافة الاحتمالية المقابلة نحصل عليها باشتقاق دالة التوزيع، أي أن :

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x^2 e^{-2x^3} & , x > 0 \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$



دالة التوزيع المعطاة في هذا المثال هي دالـــة توزيـــع وايبـــل بالبـــارامترين $\beta = 3$ ، $\alpha = 2$

[والكثافة الناتجة هي كثافة وايبل بنفس البارامترين، وسيأتي الحديث عـــن هـــذا التوزيع في الباب الرابع]

لاحـــظ في المثاليـــن السابقين (2.10)، (2.11) أن دالـــة التوزيـــع $F_X(x)$ تحقق خصائص دالة التوزيع المذكورة في الفصيل (2.4.1).

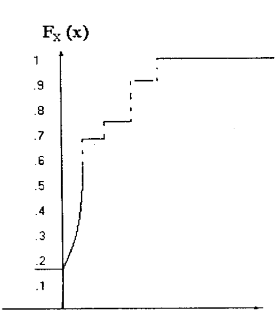
تعريف (2.5)

سنقول إن الدالة $F_X(x)$ دالة توزيع مختلطة (mixed distribution function) إذا أمكن كتابتها على الصورة :

$$F_X(x) = a\,F_X^{(d)}(x) + b\,F_X^{(c)}(x)$$

حيث a، b عددان صحيحان موجبان يقعان بين الصفر والواحد ومجموعهما يساوي الواحد. أي أن $a, b > 0$، $(a + b = 1)$.

والدالتان $F_X^{(d)}(x)$، $F_X^{(c)}(x)$ هما دالتا توزيع متقطعة (d)، ومتصلة (c) على الترتيب.



ودالة التوزيع المختلطة $F_X(x)$ ذات المنحنى المرسوم في الشكل هي الدالة :

$$F_X(x) = \frac{3}{5}F_X^{(d)}(x) + \frac{2}{5}F_X^{(c)}(x)$$

حيث تمثل $F_X^{(d)}(x)$ دالة التوزيع في مثال (2.10)، $F_X^{(c)}(x)$ دالة التوزيع في مثال (2.11).

مثال (2.12) : إذا كان طول المكالمات التليفونية (بالدقائق) من مدينة معينة يمثل ظاهرة عشوائية لها دالة توزيع كالآتي :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-[x/3]}, & x \geq 0 \end{cases}$$

حيث [y] هو أكبر عدد صحيح غير سالب أقل من أو يساوي y.

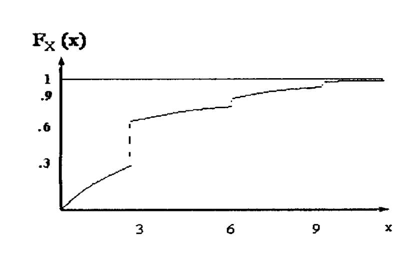
(1) ما هو احتمال أن يكون طول المكالمة التليفونية :

(i) أكثر من 6 دقائق؟ (ii) أقل من 4 دقائق؟ (iii) يساوي 3 دقائق؟

(2) ما هو الاحتمال المشروط بأن طول المكالمة التليفونية يكون :

(i) أقل من 9 دقائق إذا علمت أنها كانت أكثر من 5 دقائق؟

(ii) أكثر من 5 دقائق إذا علمت أنها كانت أقل من 9 دقائق؟



الحل : منحنى دالة التوزيع في هذا المثال يفيد بأنها دالة مختلطة فلا هي متصلة عند جميع النقط ولا هي سلمية، ولكنها خليط منهما. نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل طول المكالمة التليفونية بالدقائق. لذلك فإن احتمال أن يكون طول المكالمة التليفونية أكثر من 6 دقائق على الصورة $P(X > 6)$. أي أن :

(i) $P(X > 6) = 1 - P(X \le 6) = 1 - F_X(6)$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\right) = 0.135.$$

(ii) $P(X < 4) = P(X \le 4) = F_X(4)$.

(لاحظ أن $F_X(x)$ متصلة عند $x = 4$).

$$P(X < 4) = 1 - \frac{1}{2}e^{-4/3} - \frac{1}{2}e^{-1} = 0.684.$$

(iii) $P(X = 3) = F_X(3) - \lim\limits_{x \to 3^-} [F_X(x)]$,

$$F_X(3) = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} = 1 - e^{-1},$$

$$\lim_{x \to 3^-} [F_X(x)] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-(3-\varepsilon)/3} - \frac{1}{2}e^{-(3-\varepsilon)/3}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

ذلك لأن العدد $\frac{3-\varepsilon}{3}$ أصغر من الواحد لقيم ε الصغيرة الموجبة القريبة من الصفر، وإذن صحيح هذا العدد يساوي صفرا، أي أن $\left[\frac{3-\varepsilon}{3}\right] = 0$. لذلك فإن :

$$P[X=3]=1-e^{-1}-\frac{1}{2}(1-e^{-1})=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=0.316$$

(2) $$P[X<9\,|\,X>5]=\frac{P[X<9,X>5]}{P[X>5]}=\frac{P[5<X<9]}{P[X>5]}$$

ونلاحظ أنه بينما النقطة 5 هي نقطة اتصال للدالة $F_X(x)$ إلا أن 9 هي نقطة عدم اتصال لهذه الدالة. لذلك فإن :

$$P_X(5<X<9)=F_X(9)-p_X(9)-F_X(5).$$

حيث $p_X(9)$ القفزة عند النقطة 9. أو أن :

$$P(5<X<9)=\lim_{x\to 9^-}[F_X(x)]-F(5)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}e^{-3}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}e^{-5/3}-\frac{1}{2}e^{-1}\right)$$

$$P(5<X<9)=\frac{1}{2}(e^{-5/3}+e^{-1}-e^{-2}-e^{-3})=0.187\ .$$

$$P(X>5)=1-F_X(5)=\frac{1}{2}\left(e^{-5/3}+\frac{1}{2}e^{-1}\right)=0.279.$$

$$P[X<9\,|\,X>5\,]=\frac{0.187}{0.279}=0.67$$

(ii) $$P[X>5\,|\,X<9]=\frac{P(5<X<9)}{P(X<9)}\ ,$$

$$P(X<9)=\lim_{x\to 9^-}[F_X(x)]=1-\frac{1}{2}\left(e^{-3}+e^{-2}\right)=0.908$$

لذلك فإن :

$$P[X>5\,|\,X<9]=\frac{0.187}{0.908}=0.206\ .$$

تمـــارين (2)

(1) دحرجت زهرتا نرد متزنتين. إذا مثل X حاصل ضرب العددين الظـــاهرين على سطحي الزهرتين، فاوجد $P[X = x]$ لجميع قيم x.

(2) يمثل المتغير العشوائي X (عدد الصور − عدد الكتابة) في تجربة إلقاء عملة n من المرات. ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X؟

(3) إذا كانت العملة في السؤال (2) متوازنة. وألقيت ثلاث مـــرات (أي $n = 3$)، فما هي الاحتمالات المرتبطة بالقيم التي يمكن أن يأخذها X؟

(4) دحرجت زهرة نرد مرتين، ما هي القيم التي يمكن أن تأخـــذها المتغيـــرات العشوائية المعرفة بالآتي :

(i) X = أكبر قيمة تظهر على السطحين.

(ii) Y = أقل قيمة تظهر على السطحين.

(iii) Z = مجموع ما يظهر على السطحين.

(iv) W = ما يظهر على الزهرة الأولى ـــ ما يظهر على الزهرة الثانية.

(5) إذا كانت الزهرة في السؤال (4) متوازنة، فاكتب الاحتمالات المرتبطة بالقيم التي يمكن تأخذها المتغيرات العشوائية في (i) ـــ (iv).

(6) إذا خضع المتغير العشوائي X لدالة توزيع F_X، وإذا كـــان $Z = \alpha X + \beta$ حيث α، β ثابتان، $\alpha \neq 0$ ، فاوجد دالة التوزيع F_Z للمتغير العشوائي Z.

(7) دالة التوزيع لمتغير عشوائي X هي :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0 ,\\ \frac{x}{4} & , \quad 0\le x<1 ,\\ \frac{1}{2}+\frac{x-1}{4} , & \quad 1\le x<2 ,\\ \frac{11}{12} & , \quad 2\le x<3\\ 1 & , \quad x\ge 3\end{cases}$$

(i) أوجد دالة الكتلة الاحتمالية المقابلة $p_X(x)=P[X=x]$.

(ii) إحسب : $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$.

(8) إذا كانت دالة التوزيع F_X لمتغير عشوائي X هي :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , x<1\\ 1-\left(\frac{11}{16}\right)^{[x]} & , x\ge 1\end{cases}$$

حيث [x] = أصغر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

(i) إرسم منحنى دالة التوزيع.

(ii) حدد نوع دالة التوزيع، واوجد الدالة الاحتمالية المقابلة.

(iii) إحسب $(a)\ P(X>5)$, $(b)\ P(X<3)$, $(c)\ P(X=3)$

$(d)\ P(2\le X\le 5)$

(9) إذا كانت كمية النقود (بالجنية) التي يقتصدها شخص ما في أحد البنوك تمثل ظاهرة عشوائية تتحدد دالة احتمالها بدالة التوزيع

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & , x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & , x\geq 0.\end{cases}$$

(لاحظ أن كمية سالبة من النقود تمثل ديناً).

(i) إرسم منحنى دالة التوزيع.

(ii) حدد نوع دالة التوزيع وأوجد الدالة الاحتمالية المقابلة.

(iii) ما هو احتمال أن تكون كمية النقود المقتصدة :

(a) أكثر من 50 جنيهاً ، (b) أقل من 50 جنيهاً ,

(c) $-50 < X < 50$, (d) $X = 50$.

(10) إذا كان وقت انتظار قطار في إحدى محطاته (بالدقائق) يمثل ظاهرة عشوائية تتحدد دالة احتمالها بدالة التوزيع :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , x<0,\\ \frac{x}{4} & , 0\leq x<1,\\ \frac{1}{2} & , 1\leq x<2,\\ \frac{x}{4} & , 2\leq x<4,\\ 1 & , x\geq 4.\end{cases}$$

(i) إرسم منحنى دالة التوزيع.

(ii) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة.

(iii) ما هو احتمال أن الوقت الواجب انتظاره :

(a) أكثر من 3 دقائق

(b) أقل من 3 دقائق

(c) بين دقيقة، 3 دقائق

(iv) أوجد قيمة الاحتمال المشروط بأن زمن الانتظار :

(a) أكثر من 3 دقائق إذا علمنا أنه أكثر من دقيقة

(b) أقل من 3 دقائق إذا علمنا أنه أقل من دقيقة

(11) إذا اعتبرنا ظاهرة عشوائية لها متغير عشوائي X ودالة توزيع F_X معطاة بالآتي :

$$F_X(x)=\begin{cases} 0\,, & x<0\,,\\ \frac{x}{4}\,, & 0\le x<1\,,\\ \frac{1}{3}\,, & 1\le x<2\,,\\ \frac{x}{6}\,, & 2\le x<3\,,\\ \frac{1}{2}\,, & 3\le x<4\,,\\ \frac{x}{8}\,, & 4\le x<8\,,\\ 1\,, & x\ge 8\,. \end{cases}$$

(i) إرسم منحنى دالة التوزيع.

(ii) حدد نوع دالة التوزيع.

(iii) إحسب :

$$P[2\le X\le 5\,|\,1\le X\le 6]$$

(12) إعتبر دالة التوزيع F_X لمتغير عشوائي X المعطاة بالآتي :

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)\,,\ -\infty<x<\infty\,.$$

(i) إرسم منحنى دالة التوزيع.

(ii) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة ثم إرسم منحنى هذه الدالة.

(iii) إحسب قيمة :

(a) $P(X<2)$, (b) $P(X>3)$

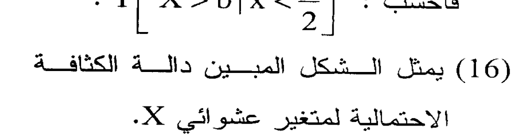
(c) $P\left(X<1+\sqrt{3}\right)$ (d) $P\left(X>2\,|\,X<1+\sqrt{3}\right)$

(13) أوجد دالة الكتلة الاحتمالية المقابلة لدالة التوزيع :

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{5}, & 1\le x<2,\\ \frac{4}{5}, & 2\le x<3,\\ \frac{9}{10}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(14) يخضع متغير عشوائي متصل X لدالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)=\begin{cases} b\,e^{-bx}, & x>0,\\ 0, & e.w.\end{cases}$. إذا كانت $p_j=P(j\le X<j+1)$، فاثبت أن p_j تأخذ الصورة : $(1-a)\,a^j$ وأوجد قيمة a.

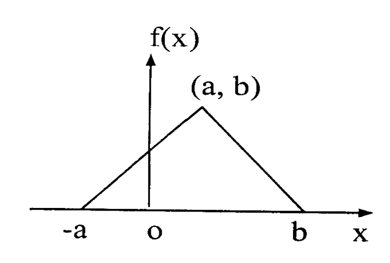
(15) يخضع المتغير العشوائي X لدالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & -1\le x\le 0,\\ 0, & e.w.\end{cases}$. إذا كان b عددا يحقق المتباينة $-1<b<0$، فاحسب : $P\left[X>b \mid x<\frac{b}{2}\right]$.



(16) يمثل الشكل المبين دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي X.

(i) ما هي العلاقة بين a، b ؟

(ii) إذا كان $a>0$، $b>0$ ، فما هي أكبر قيمة يمكن أن يأخذها b ؟



(17) دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$f_X(x)=\begin{cases} a\,x\ , & 0\le x\le 1,\\ a\ , & 1\le x\le 2,\\ -a\,x+3a\ , & 2\le x\le 3,\\ 0\ , & e.w.\end{cases}$$

(i) أوجد قيمة a.

(ii) إرسم منحنى دالة الكثافة f_X.

(iii) أوجد دالة التوزيع F_X المقابلة ثم إرسم منحنى هذه الدالة.

(iv) إذا كانت X_1 ، X_2 ، X_3 ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة تخضع للكثافة الاحتمالية f_X المعطاة، ما هو احتمال أن يكون واحدا بالضبط من هـذه المتغيرات أكبر من 1.5؟

(18) يخضع طول عمر جهاز إلكتروني X (مقاسا بالساعات) للكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^n}\ , & 2000\le x\le 10{,}000\ , \quad (n\ge 2)\\ 0\ , & e.w.\end{cases}$$

(i) أوجد قيمة الثابت A.

(ii) ما هو احتمال تعطل الجهاز قبل انقضاء 5000 ساعة؟

(iii) أوجد دالة التوزيع F_X وإرسم المنحنى المقابل.

(19) تمثل كل من الدوال الآتية دالة توزيع F_X لمتغير عشوائي متصل بحيث أن: $F_X(x)=0\,,\ x<a$ ، $F_X(x)=1,\ x>b$ ، $[a, b]$ هي الفترة المبينة.

(i) إرسم في كل حالة دالة التوزيع F_X.

(ii) أوجد دالة الكثافة f_X المقابلة، وتأكد من أنها تمثل بالفعل كثافة احتمالية.

(iii) إرسم منحنى دالة الكثافة الاحتمالية.

(a) $F_X(x)=\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2}, -1\le x\le 1$, (b) $F_X(x)=e^{3x}, x\le 0$,

(c) $F_X(x)=\dfrac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right), 0\le x\le 1$, (d) $F_X(x)=\dfrac{x}{5}, 0\le x\le 5$.

(20) يخضع قطر كابل كهربي لدالة الكثافة الاحتمالية :

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\le x\le 1,\\ 0 & , e.w.\end{cases}$$

(i) تحقق من أن هذه الدالة تمثل بالفعل كثافة احتمالية، وارسم المنحنى المقابل.

(ii) أوجد دالة التوزيع المقابلة F_X وارسم منحنى هذه الدالة.

(iii) أوجد قيمة العدد b الذي يحقق المتباينة : $P(X<b)=2\,P(X>b)$.

(iv) إحسب : $P\left[X\le\frac{1}{2}\,|\,\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3}\right]$.

الباب الثالث

بعض دوال الكتلة الاحتمالية الهامة

الدالة الاحتمالية $P(A)$ ضرورية وكافية لوصف ظاهرة عشوائية عن طريق حساب احتمال حدث A ينتمي إلى فضاء عينة S. ولقد لاحظنا في الباب السابق أنه بتعريف متغير عشوائي X على أنه دالة تنقل نقط فضاء العينة S إلى خط الأعداد الحقيقية (أو جزء منه)، يمكننا إستبدال S بخط الأعداد، والدالة الاحتمالية $P(A)$ بدوال أخرى لمتغيرات حقيقية بدلا من دوال لمجموعات، مثل دوال الكثافة (الكتلة) أو دوال التوزيع، حيث حددنا العلاقات بين $P(A)$ وهذه الدوال فمثلاً :

(1) العلاقة بين $P(A)$ ودالة الكتلة الاحتمالية $p(x)$ لمتغير عشوائي متقطع X هي:

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

(2) العلاقة بين $P(A)$ ودالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لمتغير عشوائي متصل X هي:

$$P(A) = \int_A f(x)\, dx$$

(3) العلاقة بين $P(A)$ ودالة التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي X هي أنه :

إذا كانت $A = [X \le x]$ فإن $P(A) = P[X \le x] = F(x)$.

سنطلق على دالة الكتلة (التي تقابل متغيرا عشوائيا متقطعا)، أو دالة الكثافة (التي تقابل متغيرا عشوائيا متصلا) أو دالة التوزيع، القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

سنعرض في هذا الباب بعض القوانين الاحتمالية الهامة لمتغيرات عشوائية متقطعة وخصائصها وتطبيقاتها. هذه القوانين هي :

(3.1) قانون الاحتمال المنتظم المتقطع

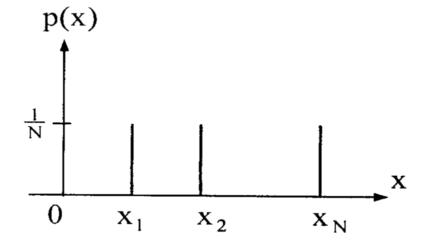
Discrete Uniform Probability Law

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x = x_1, \ldots, x_N \\ 0, & \text{e. w.} \end{cases} \qquad (3.1)$$

(N عدد صحيح موجب)

ونكتب $X \sim \text{Unif}\{x_1, \ldots, x_N\}$ لنعني أن X يخضع لقانون الاحتمال المنتظم المتقطع عند النقط x_1، ...، x_N.

وهو يمثل كتلا متساوية قيمة كل منها $\frac{1}{N}$ عند عدد محدود من النقط هي x_1، ...، x_N.



من التطبيقات الهامة في الإحصاء هو كيفية اختيار عينة عشوائية، حيث يشترط فيها لكي تكون كذلك، أن تكون عناصر العينة مستقلة عن بعضها البعض، وأن يكون لكل عنصر من عناصر العينة نفس فرصة الاختيار.فإذا اخترنا عينة ذات حجم $N = 100$، فإن احتمال اختيار أي عنصر من عناصر العينة هو $\frac{1}{100}$، أي أن عناصر العينة تخضع للقانون الاحتمالي المنتظم المتقطع عند النقط1، ...، 100.

مثال (3.1) : إذا خضع $X \sim \text{Unif}\{1, \ldots, N\}$، فإن

$$p(x) = P[X = x] = \frac{1}{N}, \; x = 1, \ldots, N \; .$$

فيكون في هذه الحالة احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أي قيمة من 1 إلى N هـو $\frac{1}{N}$ ، فمثلا، إذا كانت $N = 50$، فإن احتمـال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة 5 هـو $\frac{1}{50}$، أو القيمة 9 هو $\frac{1}{50}$، أو أي قيمة من 1 إلى 50 هو في جميع الحالات $\frac{1}{50}$.

وكذلك فإن دالة التوزيع المقابلة للكتلة (3.1) تأخذ الصورة :

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 \, , & x < x_1 \\ \frac{1}{N} \, , & x_1 \le x < x_2 \\ \frac{2}{N} \, , & x_2 \le x < x_3 \\ \frac{N-1}{N} \, , & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 \, , & x \ge x_n \end{cases}$$

F(x)
1
1/N
x₁ x₂ x₃ xₙ x

(3.2) قانون برنولي للاحتمالات Bernoulli Probability Law

رغم أن هناك من الظواهر العشوائية ما ينتج نتائج عديدة، إلا أن اهتمامنا ينحصر في بعض الأحيان في نتيجتين فقط : أن تكون نتيجة الظاهرة قد وقعت أم أنها لم تقع. فمثلاً تقسيم إنتاج مصنع إلى ما هو جيد وما هو معيب، أو أن مجموع سطحي زهرتي طاولة هو العدد 7 أم لا، أم أن عاملاً في إحدى الشركات يعمل بأجر إضافي (زيادة على عمله الأساسي) وهكذا.

ولكي نوحد المفهوم فإننا سنسمي إحدى النتيجتين نجاح ونرمز لها بالرمز s (أول حرف من كلمة success)، والأخرى فشل ونرمز لها بالرمز f (أول حرف من كلمة failure)، واختيار النجاح والفشل هو أمر نسبي، فربما تكون القطعة

المعيبة في إنتاج مصنع نجاحاً (لأن الطبيعي أن يكون إنتاج المصنع كلــه جيــدا، فالنجاح يكون في إيجاد قطعة معيبة) وربما يكون العمل بأجر إضافي فشلا، وهكذا.

سنقول إن محاولة ما تخضع لمحاولة برنوللي، إذا أنتجت هــذه المحاولـــة حدثاً من اثنين : إما نجاح "s" واحتماله p مثلاً ($0 \le p \le 1$) أو فشـــل f واحتماله q (حيث $p + q = 1$). ويكون فضاء العينة في هذه الحالة هو $\{ s, f \}$ بالاحتمالين p, q حيث $p + q = 1$.

فإذا مثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في محاولة واحـــدة مـــن محاولات برنوللي، فإن $X(\{s\})=1$، $X(\{f\})=0$ ، أي أن المتغير العـــشوائي X يأخذ القيمتين 0، 1، وتكون دالة الكتلة لقانون برنوللي هي :

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} q & , x = 0 \\ p & , x = 1 \\ 0 & , e.w. \end{cases} \qquad , q = 1 - p.$$

ويمكن كتابة هذا القانون على الصورة المكافئة المختصرة :

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} p^x q^{1-x} & , x = 0, 1, \\ 0 & , e.w. \end{cases} \qquad (3.2)$$

ونقول إن (3.2) تمثل قانون برنوللي للاحتمالات بالبارامتر p، ونكتـــب $X \sim Bern(p)$ ، ويمثـــل القانون احتمال الحصول على x من مرات النجاح في محاولة واحـــدة من محـــاولات برنوللي التي يكون احتمال النجاح فيها هو p (واحتمال الفشل هو : $q = 1 - p$).

p(x)
p q
x
0 1

سنسمي أي عملية عشوائية تتكون من محاولات برنوللي المستقلة "عمليـــة برنوللي". أي أن عملية برنوللي يجب أن تتوفر فيها الشروط الآتية :

(1) هي سلسلة من محاولات برنوللي التي يكون لكل محاولة منها ناتجان فقط : إما نجاح "s" وإما فشل "f"، أي أن كل محاولة منها لها فضاء عينة $\{ s , f \}$.

(2) كلما حاولنا محاولة من محاولات برنوللي نتج نفس احتمال النجــاح p (وإذن نفس احتمال الفشل q)، أي أنه في كل محاولة من محاولات برنوللي يكون :

$$P(\{ s \}) = p , P(\{ f \}) = q , \quad p + q = 1 .$$

(3) تكون جميع المحاولات مستقلة، فمثلا إذا أجرينــا محــاولتين، فــإن احتمــال الحصول على نجاح في المحاولة الأولى ونجاح في المحاولة الثانية يــساوي حاصل ضرب احتمال النجاح في المحاولة الأولى في احتمــال النجــاح فــي المحاولة الثانية، أي أن :

$P(\{ s, s \}) = P(\{ s \}) P(\{ s \}) = p^2$. وهكذا.

مثال (3.2) : يتكون فضاء عينة تجربة S من ثلاث محــاولات مــن محــاولات برنوللي المستقلة، التي يكون احتمال النجاح فــي أي منهــا هــو p (واحتمال الفشل هو q) ويمكن كتابة فضاء العينة كحاصل الــضرب الكرتيزي :

$$S = \{ s , f \} \times \{ s , f \} \times \{ s , f \} = \{ (s, s, s) , (s, s, f), (s, f, s), (f, s, s), (s, f, f), (f, s, f), (f, f, s), (f, f, f) \}.$$

وهو يتكون من $2^3 = 8$ أعضاء، كل عضو منها عبارة عن نقطة في فضاء مــن ثلاثة أبعاد. ويمكن تمثيل فضاء العينة كما في العمود الأول من جدول (1).

ونظراً لأن المحاولات مستقلة، فإن الاحتمالات على فضاء العينة تمثــل بــالعمود الثاني (من على اليسار). فإذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي X يمثل عــدد مــرات النجاح في محاولات برنوللي الثلاث المستقلة فإن هذا المتغير يأخذ القيم 0، 1، 2، 3، كما هو موضح في العمود الثالث. وأخيراً فإن دالة الكتلة الاحتماليــة للمتغيــر

العشوائي X تكتب في العمود الرابع ويمكن كتابتها على الصورة المختصرة :

جدول (1)

أعضاء فضاء العينة	الاحتمالات على فضاء العينة	قيم المتغير العشوائي X	القانون الاحتمالي $p(x) = P[X=x]$
(f, f, f)	$qqq = q^3$	0	$\binom{3}{0} p^0 q^3$
(f, f, s)	$qqp = pq^2$	1	$\binom{3}{1} p\, q^2$
(f, s, f)	$qpq = p\, q^2$		
(f, f, s)	$p\, qq = pq^2$		
(f, s, s)	$qpp = p^2\, q$	2	$\binom{3}{2} p^2 q$
(s, f, s)	$pqp = p^2 q$		
(s, s, f)	$ppq = p^2 q$		
(s, s, s)	$ppp = p^3$	3	$\binom{3}{3} p^3\, q^0$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} p^{x}\, q^{3-x} & , x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} \quad , \quad (p + q = 1)$$

حيث : $\binom{3}{x} = \frac{3!}{x!(3-x)!}$ ، $x! = x(x-1)\ldots(3)(2)(1)$.

ويمكن تعميم المناقشة السابقة في هذا المثال إلى n من محاولات برنوللي المستقلة، وهذا يؤدي إلى ما نسميه قانون ذات الحدين للاحتمالات.

(3.3) قانون ذات الحدين للاحتمالات Binomial Probability Law

إذا مثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من محاولات برنوللي المستقلة، فإننا نقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون ذات الحدين

للاحتمالات بالبارامترين n، p، ونرمز لذلك بالرمز $X \sim bin\ (n, p)$، ونكتب دالة الكتلة الاحتمالية لهذا القانون على الصورة :

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-x} & , x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} , (p + q) = 1 \qquad (3.3)$$

حيث n عدد صحيح موجب.

وعلى ذلك فيمثل قانون ذات الحدين للاحتمالات احتمال الحصول علـــى x مـــن مرات النجاح في n من محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح فـــي أي منها هو p (واحتمال الفشل هو q حيث $p + q = 1$).

تسمى $\binom{n}{x}$ معاملات ذات الحدين، وهي ترمز للآتي :

$$\binom{n}{x} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!} & , \quad \text{n صحيح موجب} \\ \dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} & , \quad \text{n عدد حقيقي} \end{cases}$$

وتوجد جداول لحساب معاملات ذات الحدين $\binom{n}{x}$ نورد بعضها كما في جدول (I) في ملحق (E). كما أن جدول (II) يحسب قيم دالة ذات الحدين التجميعية :

$$P[X \geq x] = \sum_{y=x}^{n} \binom{n}{y} p^{y} q^{n-y}$$

أي أنه يمكننا الاستعانة بجدول (II) في حساب احتمال الحصول على x على الأقل من عدد مرات النجاح في n من محاولات برنوللي المـــستقلة (n =5, 8, 10, 15) التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو p (0.50 (0.01) p = 0.01). ولقيم x المختلفة. وهذا الجدول يعيننا في حساب دالة التوزيع F(x)، حيث :

$$F(x) = P[X \le x] = \sum_{y=0}^{x} p(y) = \sum_{y=0}^{x} \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$

إذ أن :

$$F(x) = 1 - P[X > x] = 1 - P[X \ge x + 1]$$

ويمكن التحقق من أن $p(x)$ تمثل دالة كتلة احتمالية بملاحظة أن $p(x) \ge 0$ لجميع قيم x، وأن :

$$\sum_{x} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

ونلاحظ أن $p(x)$ في المعادلة (3.3) تمثل الحد العام في مفكوك ذات الحدين للمقدار $(p+q)^n$، ولهذا أطلق على القانون "ذات الحدين" للاحتمالات.

مثال (3.4) : إذا علمت أن 5% من إنتاج مصنع لقطع معدنية تمثل نسبة القطع المعيبة في الإنتاج، **(أ)** إذا سحبت $n = 20$ من إنتاج المصنع، ما هو احتمال الحصول على : (i) 3 قطع معيبة على الأكثر (ii) 3 قطع معيبة على الأقل (iii) 3 قطع معيبة.

(ب) ما هو عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع لكي يكون احتمال وجود قطعة معيبة على الأقل مساوياً $\frac{1}{2}$ أو أكثر.

الحل : في هذا المثال "النجاح" يمثل "المعيب". واحتمال النجاح هو احتمال سحب قطعة معيبة من الإنتاج، أي أن $p = 0.05$، وهنا $n = 20$، فإذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد القطع المعيبة المسحوبة من القطع العشرين، فإن :

(أ) (i) إحتمال الحصول على 3 قطع معيبة على الأكثر هو

$$P[X \le 3] = 1 - P[X > 3] = 1 - P[X \ge 4] = 1 - 0.016 = 0.984$$

(ii) إحتمال الحصول على 3 قطع معيبة على الأقل هو

$P[X \geq 3] = 0.075$

(iii) إحتمال الحصول على 3 قطع معيبة هو

$$P[X = 3] = P[X \geq 3] - P[X > 3]$$
$$= P[X \geq 3] - P[X \geq 4] = 0.075 - 0.016 = 0.059$$

[**ملحوظة :** يمكن إيجاد هذا الاحتمال مباشرة بحساب

$$P[X = 3] = \binom{20}{3} (0.05)^3 \ (0.95)^{17} = (1140)\ (0.000125)\ (0.4182)$$
$$= 0.0596 \ ]$$

(ب) يمكن صياغة السؤال هنا على الصورة :

ما هي قيمة n التي تجعل $P[X \geq 1] \geq \frac{1}{2}$ ؟ أي

$$\frac{1}{2} \leq P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - (0.95)^n$$
$$\Rightarrow (0.95)^n \geq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow n \ln(0.95) \leq -\ln 2 \Rightarrow -(0.05129)\, n \leq -0.69315$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{0.69315}{0.05129} = 13.5$$

فيكون n = 14 هو أصغر عدد ممكن من المحاولات لكي نحصل على قطعة معيبة على الأقل في الإنتاج باحتمال لا يقل عن $\frac{1}{2}$. (لاحظ أن n لابد وأن يكون عدداً صحيحاً موجباً).

ملاحظات :

(1) يمكن استخدام جدول (II) في حساب الاحتمالات المختلفة على الصورة :

(i) $P[X \geq a]$ وهذا يحسب مباشرة من الجدول.

(ii) $P[X < a]$ وهذا يحول إلى الصورة (i) باستخدام متمم الحدث $[X < a]$، أي بكتابة $P[X < a] = 1 - P[X \geq a]$.

(iii) $P[X = a]$ وهذا يمكن كتابته على الصورة :

$$P[X = a] = P[X \ge a] - P[X > a] = P[X \ge a] - P[X \ge a + 1] \;,$$

ثم استخدام جدول (II) في حساب هذين الاحتمالين.

(2) عندما تكون $p > 0.5$ فإن جدول (II) يمكن استخدامه بدلالة $q = 1 - p$ بـدلا من p إذ أن الجدول مصمم للحسابات التي تكون فيها $p \le 0.5$ ، إذ أنه يمكن إثبات أن : $p(x; n, p) = p(n - x ; n, 1 - p)$

حيث : $p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n - x}$

لذلك فإن

$$P[X \ge a] = \sum_{x=a}^{n} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$
$$= \sum_{y=n-a}^{n} \binom{n}{y} q^y (1 - q)^y$$

ثم استخدام جدول (II) بالقيم $(n, n - a, q)$ بدلا من (n, a, p).

مثال (3.4) : إذا كانت $n = 10$، $p = 0.2$، فإن :

(i)
$$P[X \ge 3] = \sum_{y=3}^{10} \binom{10}{3} (0.2)^y (0.8)^{10-y}$$

ويمكن قراءة هذا من جدول (II) باستخدام $n = 10$، $x = 3$، $p = 0.2$، فنحـصل على 0.322، ليكون $P[X \ge 3] = 0.322$

(ii)
$$P[X < 3] = 1 - P[X \ge 3] = 0.678$$

(iii)
$$P[X = 3] = P[X \ge 3] - P[X \ge 4]$$
$$= 0.322 - 0.121 = 0.201$$

مثال (3.5) : إذا كانت $n = 10$، $p = 0.8$، وكان المطلوب هو حساب $P[X \ge 7]$ فإن هذا يعني احتمال الحصول على 7 على الأقل من مرات النجاح فـي 10 مـن

محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو 0.8. ويمكن أن نحسب الاحتمال المكافئ للحصول على 3 على الأكثر من مرات الفشل في 10 من محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال الفشل في أي منها هو 0.2. لذلك فإن $P[X \geq 7]$ حيث $n = 10$، $p = 0.8$، يكافئ $P[Y \leq 3]$ حيث $n = 10$، $q = 0.2$، وتستخدم هذه القيم في الجدول مع $y = 4$ لنحصل على :

$$P[Y \leq 3] = 1 - P[Y \geq 4] = 1 - 0.121 = 0.879 \ .$$

ملحوظة :

في المسألتين الأولى والثانية من تمارين (3)، نثبت أنه عندما تكون $p = 0.5$، فإن $\frac{p(x+1)}{p(x)} = \frac{(n-x)}{(x+1)}$ ، لذلك فإن قانون ذات الحدين يأخذ نهاية عظمى :

(1) عند $x = k$، إذا كانت $n = 2k$ حيث $k = 1, 2, 3, \ldots$ ، وقيمة النهاية العظمى هي : $p(k) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$.

(2) عند $x = k - 1$، $x = k$، إذا كانت $n = 2k - 1$، حيث $k = 1, 2, 3, \ldots$، وقيمة النهاية العظمى هي : $p(k-1) = p(k) = \binom{2k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$.

تعرف القيمة التي تأخذ عندها دالة الكتلة (الكثافة) الاحتمالية نهاية عظمى **بمنوال** الكتلة (الكثافة) الاحتمالية. فيكون لقانون ذات الحدين بالبارامترين $\left(n, \frac{1}{2}\right)$:

المنوال عند:
- k ، إذا كانت n زوجية $(n = 2k)$.
- k، $k - 1$ ، إذا كانت n فردية $(n = 2k - 1)$.

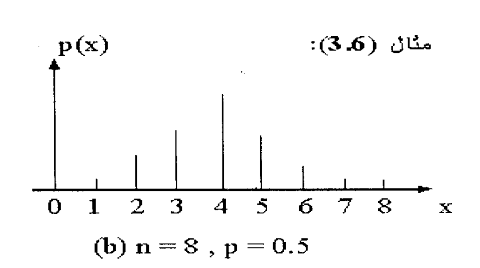
وعلى وجه العموم، فإن $p(x)$ تتزايد بتزايد x طالما كانت $x < np - q = (n+1)p - 1$، وتتناقص بتناقص x طالما كانت $x > np - q$.

لذلك فإن $p(x)$ تتزايد إلى نهاية عظمى عند العـــدد الصحيح x الذي يحقق المتباينة: $(n+1)p-1 \le (n+1)p$، ثم تتناقص بعد ذلك. وحينما تكون $p\ (n+1)$ عـــددا صحيحا، فإن $p[(n+1)\ p\ -\ 1] = p[(n+1)\ p]$.

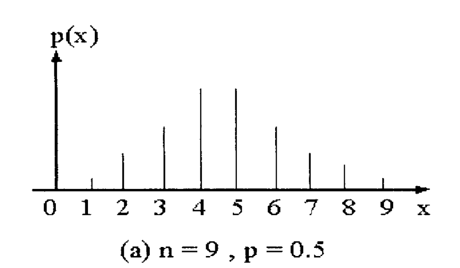
ويكون توزيع ذات الحدين أحادي المنوال.

وأما إذا كانت $p < \dfrac{1}{n+1}$ ، فإن المنوال يكون عند نقطة الأصل.

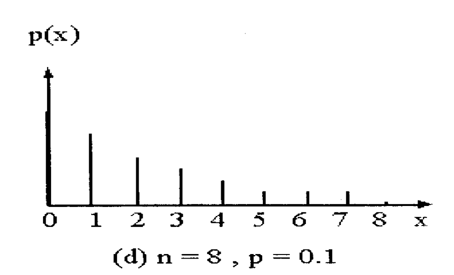
مثال (3.6):



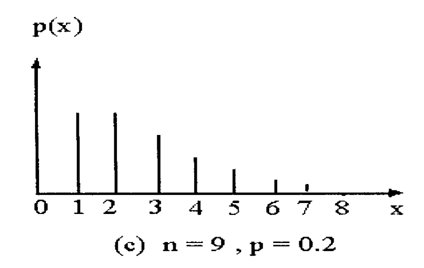
(b) n = 8 , p = 0.5



(a) n = 9 , p = 0.5



(d) n = 8 , p = 0.1



(c) n = 9 , p = 0.2

(a) إذا اعتبرنا $\left(n=9, p=\dfrac{1}{2}\right)$، فـــإن n تكون فرديـــة $(n = 2k - 1)$ لـــذلك فإن $n = 5$، وفي هذه الحالة يكون المنوال (القيمة التي تأخذ عندها دالة الكتلة

الاحتمالية نهاية عظمى) عند 4 أو 5. حيث تتساوى هذه النهاية العظمى التي تكون عندها $p(4) = p(5) = 0.246$ ، وتأخذ دالة الكتلة الاحتمالية في هذه الحالة الشكل (a).

(b) عندما $\left(n = 8, p = \frac{1}{2}\right)$، فإن n تكون زوجية $(n = 2k)$، لذلك فإن $k = 4$، ويكون المنوال في هذه الحالة هو 4، والنهاية العظمى للدالة عند المنوال قيمتها : $p(4) = 0.273$، كما في الشكل (b).

(c) عندما $(n = 9, p = 0.2)$، فإن $(n+1)\,p$ يكون عددا صحيحاً مساويا 2، لذلك فإن : $p(1) = p(2) = 0.877$ كما في شكل (c).

(d) عندما $(n = 8, p = 0.1)$، تكون $p < \frac{1}{n+1}$، ويكون المنوال عند الصفر وأكبر كتلة هناك هي $p(0) = 0.43$ كما في الشكل (d).

(3.3.1) خصائص قانون ذات الحدين للاحتمالات

(1) لتوزيع ذات الحدين للاحتمالات معدل تعطل تزايدي، تعرف نسبة (ميل) (Mill's ratio) لمتغير عشوائي متقطع بأنها النسبة :

$$m(t) = \sum_{j \ge t} p(j) / p(t) = \frac{\overline{F}(t)}{p(t)},$$

حيث $\overline{F}(t) = 1 - F(t) = \sum_{j \ge t} p(j)$.

لذلك فهي مقلوب دالة معدل التعطل (failure rate).

ونسبة (ميل) لقانون ذات الحدين للاحتمالات تحقق المتباينة الآتية :

$$\frac{t}{n} \le m(t) \le \frac{t\,q}{t - n\,p}$$

بشرط أن : $t > n\,p$.

(2) إلتواء كتلة ذات الحدين يكون موجبا، إذا كانت $p < \frac{1}{2}$، كما أنه يكون سالبا، إذا كانت $p > \frac{1}{2}$، ويكون التوزيع متماثلا عندما $p = \frac{1}{2}$.

(3) يمكن إثبات أن توزيع المتغير العشوائي المعياري : $Z = \frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$ يؤول إلى التوزيع المعتدل المعياري $N(0, 1)$ عندما $n \to \infty$.

(4) ويمكن إثبات أنه إذا كانت $X_1 \sim bin\left(n_1, \frac{1}{2}\right)$، $X_2 \sim bin\left(n_2, \frac{1}{2}\right)$ وكان X_1، X_2 مستقلين، وكان $Z = X_1 - X_2$، فإن :

$$p_Z(z) = P[X_1 - X_2 = z] = \binom{n_1 + n_2}{n_2 + z}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1 + n_2} \quad , n_2 + z = 0, 1, 2, \ldots, n_1$$

(3.3.2) تطبيقات قانون ذات الحدين للاحتمالات

يستخدم قانون ذات الحدين للاحتمالات في عديد من المجالات العملية التي نذكر بعضها في الآتي :

(1) في الوراثة، حيث تعتمد الخصائص البيولوجية الموروثة على جينات تحدث بصورة ثنائية مثل الشعر المستقيم مقابل الشعر المجعد مثلا، وتطبيقات وراثية أخرى تتعلق بعدد النويات (neocleotides) التي توجد في نفس الحالة لمتتابعتين من متتابعات DNA.

(2) عدد القطع المعيبة في عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من إنتاج كبير يمثله متغير عشوائي يخضع لقانون ذات الحدين.ومن التطبيقات عظيمة الأهمية في الصناعة "قبول العينة" (acceptance sampling) لاختبار متوسط عينة (ذات الحدين) مقابل قيمة افتراضية.

(3) علم البيئة (ecology) الحيواني والنباتي من مجالات تطبيق هذا التوزيع، فيطبق مثلاً في تقدير حجم مجتمع حيواني تم ترك علامة عليه وتركه،

وللتطبيقات في البيئة النباتية يرجع إلى [Boswell, Ord and Patil (1979)].

(4) وفي بناء النماذج مثل نماذج الأكياس (urn models) التي يتم السحب منهــا على أساس محاولات برنوللي.

(5) وفي الإحصاء اللابارامتري (non parametric statistics) حيث يمثل ذات الحدين للاحتمالات توزيع العينة لإحصاء كل من اختبار الإشارة (sign test) واختبارات أخرى.

(6) ولأن توزيع ذات الحدين يمثل نهاية توزيعات منفصلة أخـــرى، فإنـــه يمكـــن استخدامه كتقريب لهذه التوزيعات (لقيم مناسبة للبارامترات).

(7) وعلى الرغم من أن فرض استقلال المحاولات، وثبات الاحتمال من محاولـــة إلى أخرى لا يكونان محققان على وجه الدقة المرجـــوة، إلا أن نمـــوذج ذات الحدين للاحتمالات يمثل علامة سياجية حيث يمكن قياس الحيود عنه.

(8) العلاقات بين توزيع ذات الحدين وتوزيعات أخرى متعددة يمكن الرجوع إليها فـــي [Johnson, Kotz and Kemp (1992)] صـــفحات 137 - 145، المرجع [14].

(3.4) القانون الهندسي للاحتمالات Geometric Probability Law

إذا مثل متغير عشوائي X عدد المحاولات المطلوبة للحـــصول علـــى أول نجاح، فإن X يأخذ القيم 1، 2، 3، ... وإذا كان احتمال النجاح في محاولة واحدة من محاولات برنوللي المستقلة هو p (واحتمال الفشل هـــو q حيـــث $p+q = 1$)، فإن q^{x-1} هو احتمال الحصول على x - 1 من مرات الفشل، فإذا أعقبها أول نجاح، فإن $q^{x-1}\,p$ هو احتمال الحصول على أول نجاح في x من محـــاولات برنـــوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو p، ونقول إن X يخضع للقانون

الهندسي للاحتمالات الذي نعبر عنه بكتابة أن $X \sim Geom\ (p)$، وتكون دالة الكتلة الاحتمالية في هذه الحالة هي :

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} p\,q^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \ldots \quad (q = 1 - p) \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} \tag{3.4}$$

وهو يمثل احتمال الحصول على أول نجاح في x من محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو p (واحتمال الفشل هو q حيث $p + q = 1$). وسبب التسمية هو أن $p(x)$ تمثل الحد العام في متسلسلة هندسية لانهائية أساسها q. لذلك فإن :

$$\sum_x p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p\,q^{x-1} = p\left[1 + q + q^2 + \ldots\right] = \frac{p}{1 - q} = 1$$

كذلك فإن دالة التوزيع المقابلة $F(x)$ تأخذ الصورة :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q^x & , x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} \tag{3.5}$$

ذلك لأن :

$$F(x) = P[X \le x] = \sum_{y=1}^{x} p(y) = p \sum_{y=1}^{x} q^{y-1}$$

$$= p\left[1 + q + q^2 + \ldots + q^{x-1}\right] = p\left[\frac{1 - q^x}{1 - q}\right]$$

$$= 1 - q^x$$

إذ أن $1 + q + q^2 + \ldots + q^{x-1}$ يمثل مجموع متسلسلة هندسية عدد حدودها x، وحدها الأول 1، والأخير q^{x-1}، وأساسها q.

مثال (3.7) : ما هو احتمال إلقاء زهرتي نرد متوازنتين أكثر من ست مرات للحصول على 7 ؟

الحل : إذا مثل X عدد المحاولات التي تجرى للحصول على 7، فإن المطلوب يكون هو $P[X > 6]$. واحتمال الحصول على العدد 7 هو : $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$، لأن الحدث "الحصول على العدد 7" يمثل المجموعة

$\{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$ وعدد عناصرها 6، التي تنسب إلى فضاء العينة وعدد عناصرها 36.

لذلك فإنه باستخدام (3.5)، فإننا نحصل على :

$$P[X > 6] = 1 - P[X \leq 6] = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - q^6\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.3349 .$$

أي أن احتمال إلقاء زهرتي نرد أكثر من ست مرات يتجاوز الثلث للحصول على العدد 7، وذلك بغض النظر أن احتمال الحصول على العدد 7 في إلقاءة واحدة هو $\frac{1}{6}$.

مثال (3.8) : يعمل جهاز كهربي بصورة مناسبة باحتمال وقدره 0.98 في كل مرة يتم فيها تشغيله. ما هو احتمال تشغيل الجهاز مائة مرة قبل تعطله لأول مرة ؟

الحل : إذا مثل X عدد المرات التي يتم فيها تشغيل الجهاز قبل تعطله لأول مرة فإن المطلوب يكون حساب $P[X > 100]$، ويكون $q = 0.98$، إذ أن "التعطل" في هذا المثال هو "النجاح"، وباستخدام (3.5)، فإن :

$$P[X > 100] = 1 - P[X \leq 100] = 1 - F(100) = (0.98)^{100} = 0.1326$$

مثال (3.9) : في إحدى المناطق، إذا كان احتمال حدوث عاصفة برقية في أي يوم من أيام الصيف في شهري يوليه وأغسطس هو 0.1، وإذا فرضنا

الاستقلال من يوم إلى آخر، فما هو احتمال أن تحدث أول عاصفة برقية في فصل الصيف في اليوم الثالث من أغسطس؟

الحل : إذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأيام (ابتداء من أول يولية) حتى حدوث أول عاصفة برقية، فإن المطلوب يكون حساب $P[X = 34]$، حيث يكون وقوع العاصفة البرقية هو "النجاح" باحتمال $p = 0.1$، لذلك فباستخدام (3.4)، يكون :

$$P[X = 34] = (0.1)\,(0.9)^{33} = 0.00309\,.$$

(3.4.1) خاصية هامة للقانون الهندسي للاحتمالات

للقانون الهندسي للاحتمالات خاصية هامة لا يشاركه فيها قانون احتمالي آخر (باستثناء القانون الأسي للاحتمالات في حالة دوال الكثافة للمتغيرات العشوائية المتصلة الذي له خاصية مشابهة). هذه الخاصية أن القانون الهندسي للاحتمالات "ليست له ذاكرة"، وهذه الخاصية تترجم كالآتي :

إذا كان s، t عددان صحيحان موجبان، وكان المتغير العشوائي X يخضع للقانون الهندسي للاحتمالات بالبارامتر p، فإن :

$$P[\,X > s + t \mid X > s\,] = P[\,X > t\,] \qquad (3.6)$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية بملاحظة أن :

$$P[\,X > s + t \mid X > s\,] = \frac{P[\,X > s + t, X > s]}{P[\,X > s\,]} = \frac{P[\,X > s + t\,]}{P[\,X > s\,]}$$

$$P\,[\,X > s + t \mid X > s\,] = \frac{q^{s+t}}{q^{s}} = q^{t} = P[\,X > t\,]$$

وذلك باستخدام (3.5)، إذ أن $P[\,X > a\,] = 1 - F(a) = q^{a}$.

والقول بأن القانون الهندسي ليست له ذاكرة يعني أنه إذا لم يكن الحدث A قد وقع خلال التكرارات الأولى للتجربة التي عددها s، فإن احتمال عدم وقوعه خلال

التكرارات التي عددها t التالية هو نفسه الاحتمال بأن الحدث A لن يقع خلال التكرارات الأولى التي عددها t.

وعكس هذه الخاصية صحيح بمعنى أنه إذا كانت العلاقة (3.6) صحيحة، فإن المتغير العشوائي X لابد وأن يخضع للقانون الهندسي للاحتمالات، وذلك بفرض أن X يأخذ قيماً صحيحة موجبة.

(3.4.2) تطبيقات التوزيع الهندسي للاحتمالات

للتوزيع الهندسي تطبيقات متعددة منها على سبيل المثال تطبيقات على مجموعة من أصناف معينة بالمقارنة بأخرى لمقاطع في مجتمعات نباتية، وعلى النظام الرقابي للتشوهات الخلقية، وعلى تقدير وفرة الحيوان، كما استخدم التوزيع الهندسي للاحتمالات في نظرية الموثوقية (reliability theory).

ولقد استخدم التوزيع الهندسي للاحتمالات في نماذج سلاسل ماركوف، وعلى سبيل المثال نماذج الأرصاد للدورات الجوية وكميات السقوط (للأمطار أو الثلوج)، وفي نظرية الطوابير، وفي تطبيقات النماذج الاستوكاستيكية.

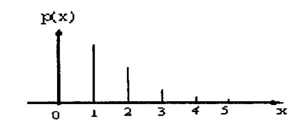
ولقد درس دانييلز Daniels (1961) تمثيل توزيع متقطع كخليط لتوزيعات هندسية، وطبق هذا على توزيعات فترة الذروة (busy-period) لأنظمة الطوابير المنتظمة.

كما استخدم سولاند Soland (1974) التوزيع الهندسي المقطوع في بعض النماذج الاجتماعية.

وبملاحظة أن القانون الهندسي (3.4) يؤدي إلى أنه : لجميع قيم x

$$p(x+1) < p(x) ,$$

فإن منوال القانون الهندسي للاحتمالات يكون



$$p(x) = p\, q^{x-1} ,\ x = 1, \ldots, 5$$

دائماً عند $x = 1$، بغض النظر عن قيمة p.

(3.5) قانون ذات الحدين السالب للاحتمالات
Negative Binomial Probability Law

التعميم الطبيعي للقانون الهندسي للاحتمالات هو قانون ذات الحدين السالب للاحتمالات حيث يكون المطلوب هو إيجاد احتمال عدد مرات تكرار التجربة حتى يقع الحدث A عددا وقدره r من المرات (بدلا من أول مرة كما هو الحال في القانون الهندسي للاحتمالات)، فإذا مثل المتغير العشوائي Y عدد محاولات برنوللي المستقلة ــ التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو p (واحتمال الفشل هو $q = 1-p$) ــ اللازم للحصول على النجاح رقم r، فإن هذه المحاولات تنقسم إلى y-r من مرات الفشل باحتمال وقدره q^{y-r}، r-1 من مرات النجاح باحتمال وقدره p^{r-1}، لذلك فإن احتمال الحدث (انظر الشكل) الذي يكون إجمالي عدد المحاولات فيه y، منها r-1 نجاح، y-r فشل، يليها نجاح باحتمال p. هو : $\left(p^{r-1}\, q^{y-r}\right)p$، لأن المحاولات كلها مستقلة، ولأن هذا الحدث (الذي يكون آخر محاولاته دائماً نجاح) يتكرر $\binom{y-1}{r-1}$ مرة، فإن :

f f s f s s f f f s f f | s

إجمالي عدد المحاولات $= y = 13$
إجمالي عدد مرات النجاح $= r = 5$
إجمالي عدد مرات الفشل $y - r = 8$

$$p(y) = P[Y = y] = \begin{cases} \binom{y-1}{r-1} p^r\, q^{y-r} , & y = r, r+1, r+2, \ldots \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (3.7)$$

تسمى دالة الكتلة الاحتمالية في (3.7) قانون ذات الحدين السالب للاحتمالات، وسنكتب $X \sim Nbin\ (r, p)$ حيث لا يشترط أن تكون r عددا صحيحا موجباً. والحكمة في التسمية هي أن $p(y)$ تمثل الحد العام في مفكوك ذات الحدين للمقدار

$p^r(1-q)^{-r}$. إذ أنه باستخدام (3.8)، فـإن: $p^r(1-q)^{-r} = \sum_{y=r}^{\infty}\binom{y-1}{r-1}p^r q^{y-r}$

فإذا كانت r عددا صحيحاً موجباً، فإنه يمكن تفسير p(y) علـى أنهـا التوزيـع الاحتمالي لزمن الانتظار للنجاح r. لذلك فقد سميت في هذه الحالة أيضا (r صحيح موجب) توزيع باسكال (Pascal).

ملاحظات

(1) من الواضح أن القانون الهندسي للاحتمالات هو حالة خاصة من (3.7)، إذ أنه في سلسلة عددها y من محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح في أي منها هو p (واحتمال الفشل q = 1 - p)، يكون احتمال الحصول على أول نجاح (r = 1) هو $p(y) = p\,q^{y-1}\ , y = 1, 2, \ldots$، وهي نفس دالة الكتلـة الاحتمالية (3.4) للقانون الهندسي للاحتمالات بالبارامتر p.

(2) إذا اعتبرنا x = y - r، فإن المتغير العـشوائي X يمثـل عـدد المحـاولات المطلوبة قبل الحصول على النجاح رقم r، وفي هذه الحالة، يأخذ قـانون ذات الحدين السالب للاحتمالات الصورة :

$$p(x) \equiv P[\,X = x\,] = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \ , x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \qquad , \ e.w. \end{cases} \tag{3.8}$$

[لاحظ أنه عندما x = y - r، فإن :

$$p(x) = P[\,X = x\,] = P[\,Y - r = x\,] = P[\,Y = x + r\,]$$

وباستخدام (3.7)، فإن :

$$P[\,Y = x + r\,] = \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x$$

ذلك لأن $\binom{b}{a} = \binom{b}{b-a}$].

ولإثبات أن $p(x)$ في (3.8) تمثل دالة كتلة احتمالية، فإن $p(x) \geq 0$ لجميع قيم x،

$$\sum_x p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} p^r q^x = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x$$

$$= p^r \left[1 + \binom{-r}{1}(-q) + \binom{-r}{2}(-q)^2 + \ldots + \binom{-r}{x}(-q)^x + \ldots \right]$$

$$= p^r (1-q)^{-r} = 1$$

ذلك لأن :

$$\binom{x+r-1}{x} = \frac{(x+r-1)(x+r-2)\ldots(r+1)r}{x!}$$

$$= (-1)^x \frac{(-r)(-r-1)\ldots(-r-x+1)}{x!} = (-1)^x \binom{-r}{x}$$

فيمكن، لذلك، كتابة (3.8) على الصورة الآتية :

$$p(x) = \begin{cases} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x &, \; x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 &, \; e.w. \end{cases} \qquad (3.9)$$

ويمكننا القول بأن الصورة (3.8) تمثل احتمال الحصول على x من مرات الفشل في عدد وقدره $(r + x - 1)$ من المحاولات، وفي المحاولة $(r + x)$ يكون النجاح r.

مثال (3.8) : إذا علمت أن 20% من إنتاج مصنع هو قطع معيبة

(أ) ما هو احتمال سحب عشرة قطع للحصول على ثالث قطعة معيبة؟

(ب) ما هو احتمال سحب أكثر من أربعة قطع للحصول على ثالث قطعة معيبة؟

الحل : (أ) إذا اعتبرنا y يمثل عدد القطع المسحوبة لكي تكون القطعة r معيبة فإننا نستخدم الصيغة (3.7)، حيث $y = 10$، $r = 3$، $p = 0.2$، ويكون الاحتمال المطلوب حسابه هو :

$$p(3) = \binom{9}{2} (0.2)^3 (0.8)^7$$

وأما إذا اعتبرنا أن X يمثل عدد القطع المسحوبة التي ليس من بينها قطعا معيبة (أي x قطعة جيدة) في عدد وقدره (r + x -1) من القطع المسحوبة، فإنه باستخدام الصيغة (3.8) يكون الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(7)=\binom{9}{7}(0.2)^3\ (0.8)^7$

وفي الحالتين تكون قيمة الاحتمال المطلوب هي 0.06.

(ب) المطلوب هنا حساب : $P[Y > 4]$، حيث $r = 3$، $p = 0.2$ باستخدام (3.7) :

$$P[\,Y > 4\,] = 1 - P[\,Y \le 4\,] = 1 - [\,p(3) + p(4)\,]$$
$$= 1 - \left[(0.2)^3 + \binom{3}{2}(0.2)^3\ (0.8)\right] = 0.9758\ .$$

(3.5.1) تطبيقات توزيع ذات الحدين السالب للاحتمالات

استخدم ذات الحدين للاحتمالات في مجال "إحصاءات الحوداث"، وعمليات الولادة والوفيات (birth and death processess)، وتحليل البيانات النفسية، والتوزيع المتباطئ للسلاسل الزمنية في الاقتصاد، وفي أبحاث السوق والإنفاق الاستهلاكي، وكذلك فقد طبق في المجالات الطبية والعسكرية، وفي تحليل بيانات المكتبات، وفي أبحاث البيئة، وتحليل عينات مياه الشرب، وعلوم الحشرات، وأحجام الأسر، وتطبيقات أخرى عديدة يمكن الحصول عليها بمراجعها من كتاب Johnson, Kotz and Kemp (1992).

(3.6) القانون فوق الهندسي للاحتمالات
Hypergeometric Probability Law

إذا افترضنا صندوقاً يحتوي على Np كرة بيضاء (W)، $N(1-p) = Nq$ كرة سوداء (B)، وإذا سحبنا من هذا الصندوق n كرة بدون إعادة أي منها إلى

الصندوق، وإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكور البيضاء في العينـــة ذات الحجم n، فإن القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو

N

Np	Nq
W	B

n

$$p(x) \equiv P[X = x] = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , x = 0, 1, \ldots, n \quad (3.10)$$

حيث $n = 1, 2, \ldots, N$ ،$N = 1, 2, 3, \ldots$ ،$p = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1$

ونقول إن X يخضع للقانون فوق الهندسي للاحتمـــالات بالبـــارامترات (n, N, p) ونكتب $X \sim hyp\ (n, N, p)$.

وبصورة عامة، إذا اعتبرنا مجتمعاً عدد أعضائه N، وأردنا سحب عينـــة منه حجمها n (بدون إحلال)، وكانت نسبة الأعضاء في هذا المجتمـــع التـــي لهـــا خاصية معينة A مثلا هي p، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الأعضاء فـــي العينة ذات الحجم n التي لها الخاصية A، فإن القانون فوق الهندسي للاحتمـــالات يمثل احتمال الحصول على x من الأعضاء ذوي الخاصية A في العينة ذات الحجم n.

وسبب التسمية "فوق الهندسي" أن الكتل p(x) في المعادلة (3.10)، حيث $x = 0, 1, \ldots, n$ تمثل الحدود المتتابعة في المفكوك

$$\frac{(N-n)!\,(Nq)!}{N!\,(Nq-n)!}\ {}_2F_1[-n, -Np; Nq-n+1; 1]$$

حيث

$${}_2F_1(\alpha, \beta; r, z) = 1 + \frac{\alpha\ \beta}{r}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha\ (\alpha+1)\ \beta\ (\beta+1)}{r\ (r+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

هي متسلسلة جاوس فوق الهندسية (Gauss hypergeometric series)، [أنظر (B.24) في ملحق (B)].

تمثل $p(x)$ في (3.10) دالة كتلة احتمالية لأن :

$$\sum_{x} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x} \Big/ \binom{N}{n} = 1$$

ذلك لأن : $\sum_{x=0}^{n} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x} = \binom{a+b}{n}$ ، لأي عددين حقيقيين a، b، [أنظر (A.25) في ملحق (A)].

مثال (3.9) : إذا علمت أن من بين 100 شخص يوجد 10% من ذوي الضغط العالي، واخترت عشرة أعضاء من هذا المجتمع، فما هو احتمال أن يكون من بين هؤلاء العشرة المختارين عدداً لا يزيد على اثنين من ذوي الضغط العالي ؟

الحل : المطلوب هنا هو حساب $P[X \le 2]$ حيث يخضع X للقانون فوق الهندسي للاحتمالات بالبارامترات $(n = 10, N = 100, p = 0.1)$، لذلك فإن :

$$P[X \le 2] = \sum_{x=0}^{2} \binom{(100)\,(0.1)}{x}\binom{(100)\,(0.9)}{10-x} \Big/ \binom{100}{10} = 0.94\,.$$

مثال (3.10) : يحتوي صندوق على 20 كرة، نسبة الكرات البيضاء فيها 60%. سحبت 4 كرات من الصندوق، الواحدة تلو الأخرى بدون إعادة أي منها إلى الصندوق.

20

W	B
12	8

n

(أ) ما هو احتمال أن يكون من بين الكرات الأربع المسحوبة كرة واحدة بيضاء؟

(ب) ما هو احتمال أنه من بين الكرات الأربع المسحوبة ثلاث كرات على الأقل تكون بيضاء ؟

الحل : إعتبر أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء الموجودة في الكرات الأربع المسحوبة :

(أ)
$$P[X = 1] = \binom{12}{1}\binom{8}{3} / \binom{20}{4} = 0.139$$

(ب)
$$P[X \geq 3] = \sum_{x=3}^{4} \binom{12}{x}\binom{8}{4-x} / \binom{20}{4} = 0.465 \ .$$

مثال (3.11) : تشحن موتورات كهربية صغيرة في مجموعات حجم كل منها 50 موتوراً. وقبل أن تقبل هذه الشحنة، فإن مفتشاً يقوم باختيار أي خمسة من بين مجموعة واحدة (أي من 50 موتوراً) ويختبرها. فإذا لم يجد أي من الموتورات الخمسة معيباً، فإنه يقوم باختبار الشحنة كلها. فإذا علمنا أن في كل مجموعة يوجد بالفعل ثلاثة موتورات معيبة، فما هو احتمال أن المفتش سيقوم باختبار الشحنة كلها ؟

الحل : إذا اعتبرنا أن X يمثل عدد القطع المعيبة في المجموعة الواحدة، فإن قيام المفتش باختبار الشحنة كلها يعني أن $X \geq 1$، واحتمال ذلك هو :

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.72 \ .$$

(3.6.1) بعض خصائص التوزيع فوق الهندسي للاحتمالات

(1) في المسألة (19) من تمارين (3) :

$$p(x+1) = \frac{(n-x)\,(Np-x)}{(x+1)\,(Nq-n+x+1)}\, p(x) \, .$$

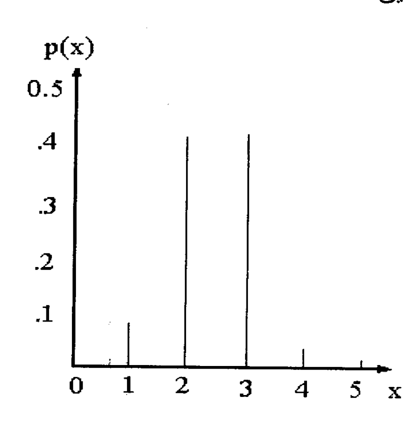
لذلك فإن $p(x+1) > p(x)$، إذا كانـــت $\frac{(n - x)\,(Np - x)}{(x + 1)\,(Nq - n + x + 1)} > 1$ ، أي إذا كانت : $x < c - 1$، وبالمثل $p(x+1) < p(x)$ إذا كانت $x > c - 1$، حيث

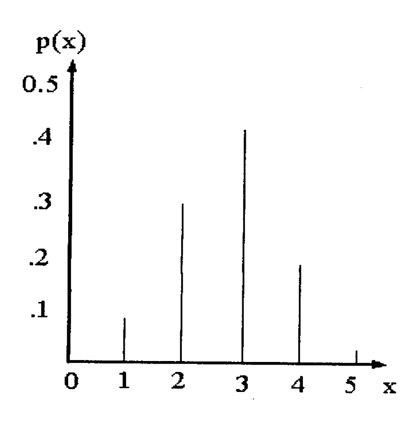
$$c = \frac{(n + 1)\,(Np + 1)}{N + 2}.$$

فتتزايد $p(x)$ بتزايد x حتى تصل إلى نهاية عظمى عند أكبـــر عـــدد صـــحيح لا يتجاوز c ثم تتناقص بعد ذلك.

لذلك فإن منوال التوزيع يكون عند $[c]$ حيث تمثل $[c]$ صحيح العدد c. فإذا كانت c عددا صحيحا، فتوجد نهايتان عظميان عند c ،$c-1$.

سنعطي مثالين أحدهما فيه $c = 3.375$، حيث $\left(n = 5, N = 14, p = \frac{4}{7}\right)$، والآخر فيه $c = 3$، حيث $\left(n = 4, N = 13, p = \frac{8}{13}\right)$. ففي المثال الأول يكـــون منـــوال التوزيع عند $c = 3$، وفي المثال الثاني توجد نهايتان عظميان عنـــد 2، 3. أنظـــر الشكلين.





$X \sim hyp\left(n=5, N=14, p=\frac{4}{7}\right)$

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	.003	.06	.279	.42	.21	.028

$X \sim hyp\left(n=4, N=13, p=\frac{8}{13}\right)$

x	0	1	2	3	4
p(x)	.007	.112	.392	.392	.097

(2) إذا كانت $X \sim hyp(n, N, p)$، وكتبنا $p(x)$ في (3.10) بدلالة البارامترات، أي كتبنا :

$$p(x) \equiv p(x; n, N_1, N_2),\ N_1 = N p,\ N_2 = N q,\ (N_1 + N_2 = N)$$

فإننا نلاحظ أن :

$$\text{(i)}\quad p(x; n, N_1+1, N_2+1) = \frac{(N_1+1)(N_2-n+x)}{N_2(N_1+1-x)}\, p(x; n, N_1, N_2)\ .$$

$$\text{(ii)}\quad p(x; n+1, N_1, N_2) = \frac{(N_2-n+x)(n+1)}{(n+1-x)\ (N-x)}\, p(x; n, N_1, N_2).$$

$$\text{(iii)}\quad p(x; n, N_1, N_2+1) = \frac{(N-n+1)(N_2+1)}{(N_2-n+x+1)(N+1)}\, p(x; n, N_1, N_2).$$

$$\begin{aligned}\text{(iv)}\quad p(x; n, N_1, N_2) &= p(n-x; n, N_1, N_2)\\ &= p(N_1-x; N-n, N_1, N_2)\\ &= p(N_2-n+x; N-n, N_2, N_1)\ .\end{aligned}$$

كذلك بكتابة دالة التوزيع على الصورة :

$$F(x; n, N_1, N_2) = \sum_{u=0}^{x} p(u; n, N_1, N_2),$$

فإنه يمكن إثبات أن :

$$\begin{aligned}\text{(v)}\quad F(x; n, N_1, N_2) &= 1 - F(n-x-1; n, N_2, N_1)\\ &= F(N_2-n+x; N-n, N_2, N_1)\\ &= 1 - F(N_1-x-1; N-n, N_1, N_2).\end{aligned}$$

(3) إذا كانت N كبيرة كبرا كافيا، فإن القانون الهندسي للاحتمالات يمكن تقريبه بقانون ذات الحدين للاحتمالات، وربما كانت هذه النتيجة معقولة بالبداهة، لأن قانون ذات الحدين يطبق عندما يكون سحب العينة بالإحلال (أي بإعادة المسحوب في كل مرة إلى المجموعة)، وذلك لأن احتمال "النجاح" يبقى دائماً ثابتا، بينما في قانون فوق الهندسي للاحتمالات يكون التطبيق بدون إحلال للعينة المسحوبة. وإذا كان حجم المجتمع N كبيراً، فلن يكون هناك فارق بين إحلال العضو المسحوب في العينة من عدم إحلاله قبل سحب العضو التالي.

ويمكن ملاحظة ذلك في المثال البسيط الآتي :

إفرض أننا نود حساب $P[X = 0]$:

عندما $n = 1$، فإن :

$$P[X=0]=\frac{Nq}{N}=q\,, \quad \text{(من القانون فوق الهندسي)}$$

$$P[X=0]=q\,, \quad \text{(من قانون ذات الحدين)}$$

عندما $n = 2$، فإن :

$$P[X=0]=\frac{N\,q\,(N-1)}{N\,(N-1)}=q\left(1-\frac{Np}{N-1}\right), \quad \text{(من القانون فوق الهندسي)}$$

$$P\{X=0]=q^2 \quad , \quad \text{(من قانون ذات الحدين)}$$

ونلاحظ أنه عندما تكون N كبيرة، فإن المقدار $\left(1-\frac{Np}{N-1}\right)$، يكون تقريباً q، $\left[\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{N\,p}{N-1}\right)=1-p\right]$.

وعلى وجه العموم، يكون تقريب القانون فوق الهندسي بقانون ذات الحدين للاحتمالات تقريباً جيداً عندما : $n \le (0.1)\,N$.

(3.7) قانون بواسون للاحتمالات Poisson Probability Law

إقترح الفرنسي سيمون دينيس بواسون

Simeon Denis Poisson (1781-1840)

في عام 1837 أن نهاية متتابعة كتل ذات الحدين : $p(x)=\binom{n}{x}p^x\,q^{n-x}$ عندما $n\to\infty$ ، $p\to 0$ بحيث تبقى $n\,p=\lambda$ محدودة هي :

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\,p=\lambda}}\binom{n}{x}p^x\,q^{n-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x\,!},\; x=0,1,2,\ldots$$

[سنبحث هذه الحقيقة في الفصيل التالي (3.7.1)].

لذلك فقد أصبحت دالة الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي X على الصورة :

$$p(x)=P[X=x]=\begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,\ldots & ,(\lambda>0).\\ 0 \quad ,e.w. \end{cases} \qquad (3.11)$$

تعرف بقانون بواسون للاحتمالات بالبارامتر λ، وتكتب $X\sim\wp(\lambda)$. المتغير العشوائي X يمثل هنا عدد الأحداث التي تقع بمعدل λ في وحدة الزمن، لذلك فإن قانون بواسون للاحتمالات يمثل احتمال الحصول على x من الأحداث التي تقع بمعدل λ في وحدة الزمن.

نسب القانون في (3.11) إلى بواسون على الرغم من أنه ذكر في كتاب Johnson, Kotz and Kemp (1992)، المرجع [14] أن دي موافر (deMoivre)، كان قد حصل على ذات النتيجة في عام (1711)، أي قبل بواسون بمائة وستة وعشرين عاما.

وتنشأ متغيرات بواسون العشوائية عند ارتباطها بما هو معروف بعمليات بواسون، وعمليات بواسون هي العمليات التي تتعلق بملاحظة أحداث متقطعة في فترات زمنية، طولية أو مكانية متصلة. فحينما ينصب اهتمامنا على عدد مرات

انبعاث غازات مشعة من مفاعل نووي خلال شهر مثلا، فإن الحدث المتقطع هـو انبعاث الغازات المشعة، والفترة المتصلة هي زمن الشهر.

والمتغير العشوائي X في عملية بواسون يمثل عدد الأحداث التي تقع في فترة طولها t من الوحدات. ويمكن إثبات أن X يخضع لقانون بواسون بالبارامتر λt حيث تمثل λ (الموجبة) معدل وقوع الأحداث في وحدة الزمن، فيكون هو معدل وقوع الأحداث في الزمن t، ويكون القانون الاحتمالي لعملية بواسون هو:

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots, \quad (\lambda > 0), \\ 0 \qquad\qquad , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (3.12)$$

(3.7.1) تقريب قانون ذات الحدين بقانون بواسون

ذكرنا في بداية هذا الفصل كيف أن بواسون توصل إلى القانون (3.11) بتقريب قانون ذات الحدين للاحتمالات بالبارامترين (n, p) حيث جعل n تؤول إلى مالانهاية، p تؤول إلى الصفر بحيث أن $np = \lambda$ تبقى ثابتة. ويمكن ملاحظة هذه الحقيقية بكتابة

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

فإذا اعتبرنا أن $np = \lambda$، فإن $p = \dfrac{\lambda}{n}$ ، ويصبح :

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{x!} n(n-1)\ldots(n-x+1)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$$

وعندما تؤول n إلى ∞ ، فإن :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\rightarrow 1$$

وكذلك فإن :

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\rightarrow e^{-\lambda}$$

وتكون نتيجة ذلك أن :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{x}p^{x}\,q^{n-x}\right]=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{x}}{x\,!},\qquad x \text{ لأي}$$

أي أن قانون ذات الحدين للاحتمالات $p(x)=\binom{n}{x}p^{x}\,q^{n-x}$ يؤول إلـــى قـــانون

بواسون للاحتمالات $p(x)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{x}}{x\,!}$ عندما تؤول n إلى مالانهاية، وتــؤول p

إلى الصفر بحيث تبقى $n\,p=\lambda$ ثابتة.

وهذا يعني أن قانون ذات الحدين للاحتمالات بالبارامترين $(n,\ p)$ يمكــن تقريبــه بقانون بواسون للاحتمالات بالبارامتر$\lambda=np$، عندما تكون n كبيرة، p صـــغيرة. وفي الواقع فإن هذا التقريب يكون مفيداً بصفة خاصة عندما تكون n كبيرة، وهي الحالة التي تستلزم عدداً كبيراً من الحدود إذا استخدمنا ذات الحدين في الحسابات، بينما يكون التقريب أبسط بكثير إذا استخدمنا بواسون بالبارامتر $\lambda=n\,p$ بدلاً من ذات الحدين.

ويكون التقريب جيداً عندما $n\geq 20$، $p\leq 0.05$ ، وممتـــازاً عنـــدما $n\geq 100$ ، $n\,p\leq 10$.

سنقارن في المثال التالي كتل ذات الحدين $(n=100,\ p=0.02)$ بكتل بواســـون $(\lambda=2)$.

مثال (3.12) : في هذا المثال سنقارن كتل ذات الحدين بالبارامتـــرين $p=0.02$ $n=100,$ بكتـــل بواســـون بالبـــارامتر $\lambda=np=2$، وســـنعقد المقارنـــة

بين كتلتي القانونين عندما $x = 0, 1, 2, 3, 4$ في الجدول الآتي :

x	0	1	2	3	4
bin(100, 0.02)	0.132619	0.270652	0.273414	0.182276	0.090208
$\wp(2)$	0.135335	0.270670	0.270670	0.180447	0.090223

مثال (3.13) : إذا علمت أن متوسط عدد المكالمات التليفونية التي تصل لوحة سويتش هي 5 مكالمات في الدقيقة، وإذا كان أقصى ما يمكن للوحة السويتش من التعامل هو 8 مكالمات في الدقيقة، فاوجد :

(أ) احتمال عدم استطاعة لوحة السويتش من التعامل مع جميع المكالمات في خلال دقيقة.

(ب) إحتمال وصول 6 مكالمات على الأكثر في خلال دقيقتين.

الحل : إذا مثل المتغير العشوائي X عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى لوحة السويتش، فإن معدل وصول (أو متوسط) المكالمات التليفونية في الدقيقة هو $\lambda = 5$. ويكون المطلوب في (أ) هو حساب $P[\,X > 8\,]$، إذ أن أقصى ما يمكن أن تتعامل معه لوحة السويتش هو 8 مكالمات في الدقيقة، لذلك فإن :

$$P[\,X > 8\,] = P[\,X \geq 9\,] = \sum_{y=9}^{\infty} e^{-5}\,\frac{5^y}{y\,!} = 0.068 \qquad \text{(أ)}$$

ولحساب احتمال وصول 6 مكالمات على الأكثر في خلال دقيقتين، فإننا نحسب (ب) على أساس أن معدل وصول المكالمات إلى لوحة السويتش في دقيقتين هو $\lambda\, t = 10$ لذلك فإنه يمكن حساب احتمال وصول 6 مكالمات على الأكثر في خلال دقيقتين كالآتي :

$$P[\,X \leq 6\,] = 1 - P[\,X > 6\,] = 1 - P[\,X \geq 7\,] \qquad \text{(ب)}$$

$$P[X \le 6] = 1 - \sum_{y=7}^{\infty} e^{-10} \frac{10^y}{y!} = 1 - 0.87 = 0.13$$

وقد حسبنا المجاميع في (أ)، (ب) من جدول (III) في ملحق (E) لدالة بواسون التجميعية.

مثال (3.14) : يوضح كيفية استخدام قانون بواسون للاحتمالات كتقريب لقانون ذات الحدين. اعتبر احتمال الحصول على خمس لمبات معيبة على الأكثر في عدد وقدره 200 لمبة من إنتاج مصنع معلوم عنه أنه ينتج 2% من لمباته ما هو معيب.

الحل : المطلوب هو حساب $P[X \le 5]$ حيث يمثل X عدد اللمبات المعيبة في 200 لمبة، بحيث يكون احتمال كون أي منها معيباً هو $p = 0.02$.

وباعتبار أن $n = 200$ "كبيرة"، $p = 0.02$ "صغيرة"، فإن قانون ذات الحدين يقترب من قانون بواسون بالبارامتر $\lambda = n\,p = 4$ ، فيكون المطلوب هو حساب $P[X \le 5]$ باستخدام قانون بواسون بالبارامتر $\lambda = 4$ ، أي :

$$P[X \le 5] = 1 - P[X > 5] = 1 - P[X \ge 6]$$
$$\cong 1 - \sum_{y=6}^{\infty} e^{-4} \frac{4^y}{y!} = 1 - 0.215 = 0.785 \,.$$

وذلك باستخدام جدول (III) في ملحق (E).

أو مباشرة :

$$P[X \le 5] \cong \sum_{y=0}^{5} e^{-4} \frac{4^y}{y!} = e^{-4} \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^3}{24} + \frac{4^5}{120} \right]$$
$$= 0.785$$

وهناك أمثلة لمتغيرات عشوائية تخضع عادة لقانون بواسون للاحتمالات أي للقانون في (3.11)، ومنها :

(1) عدد الأخطاء في إحدى الصفحات (أو مجموعة صفحات) من كتاب.

(2) عدد الناس الذين يعيشون حتى مائة عام في أحد المجتمعات.

(3) عدد المكالمات التليفونية التي تُطلب خطأ في اليوم الواحد.

(4) عدد الناس الذين يدخلون أحد البنوك، مكتب بريد، محطة بنزين، وهكذا في يوم من الأيام.

(5) عدد دقائق α التي تنبعث في فترة زمنية ثابتة من مادة مشعة معينة.

(6) عدد الزلازل التي تقع خلال فترة زمنية ثابتة.

(7) عدد الحروب في السنة.

(8) عدد الوفيات في فترة زمنية معينة من الذين كانوا يحملون وثائق تأمين على الحياة في شركة تأمين.

(9) عدد إصابات القنابل الصاروخية لمنطقة معينة ضمن مساحة كبيرة تخضع للقصف الصاروخي.

(3.7.2) بعض خصائص توزيع بواسون للاحتمالات

(1) يمثل القانون في (3.11) دالة كتلة احتمالية، إذ أن

$$\sum_{x} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

(2) يمكن تحقيق أنه إذا كانت $p(x)$ كما في (3.11)، فإن :

$$\frac{p(x+1)}{p(x)} = \frac{\lambda}{x+1} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots$$

لذلك فإن $p(x-1) \leq p(x)$ إذا كانت $x \leq \lambda$، كما أن $p(x+1) \leq p(x)$، إذا كانت $x \geq \lambda - 1$.

وبناء عليه فإن $p(x)$ تتزايد بتزايد x إلى قيمة عظمى عند $x = [\lambda]$، (أو إلى قيمتين عظميين عند $x = \lambda - 1$، $x = \lambda$، إذا كانت λ عدداً صحيحاً)، ثم تتناقص

بعد ذلك بتزايد x.

(3) إذا استخدمنا الرموز الآتية :

$$p(x;\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\quad ,R(x;\lambda)=\sum_{j=x}^{\infty}p(j;\lambda)$$

فإنه يمكن تحقيق أن :

(i) $x\,p(x;\lambda)=\lambda\,p(x-1;\lambda)$

(ii) $\sum_{j=0}^{x}p(j;\lambda_1)p(x-j;\lambda_2)=p(x;\lambda_1+\lambda_2)$

(iii) $\sum_{j=x}^{\infty}j\,p(j;\lambda)=\lambda\,R(x-1,\lambda)$

(iv) $xR(x+1;\lambda)=x\,R(x;\lambda)-\lambda\,p(x-1;\lambda)$

(v) $\frac{\partial}{\partial\lambda}[\,p(x;\lambda)\,]=p(x-1;\lambda)-p(x;\lambda)$

(4) يمكن كتابة مجموع بواسون الجزئي (دالة توزيع بواسون) بدلالة دالـــة جامــا غير التامة، فمثلا

(vi) $$\sum_{j=0}^{x}p(j;\lambda)=\frac{1}{x!}\int_{\lambda}^{\infty}t^{x}e^{-t}\,dt=\frac{\Gamma(x+1;\lambda)}{\Gamma(x+1)}.$$

يمكن إثبات هذه العلاقة باستخدام التكامل بالتجزيء [المسألة (٥) تمارين ٤].

(v) $$\sum_{j=0}^{x}p(j;\lambda)=\frac{\Gamma(x+1;\lambda)}{\Gamma(x+1)}.$$

حيث

$$\Gamma(x+1,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

عندما تكون x عدد صحيح موجب

$$\Gamma(x+1)=\int_{0}^{\infty}t^{x}e^{-t}\,dt=x!$$

(5) إذا كان $X \sim \wp(\lambda)$، وكان $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$، فإنه يمكن إثبــات أن توزيـــع Z يؤول إلى التوزيع المعتدل المعياري، أي (N(0, 1، بمعنى أن

$$\lim_{\lambda \to \infty} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

وتفيد هذه الخاصية في تقريب قانون بواسون $\wp(\lambda)$ بالبارامتر λ بالقانون المعتدل المعياري (N(0, 1، عندما تكون λ كبيرة، وكذا في إيجاد فترات ثقة تقريبية.

(6) هناك تقريبات أخرى لقانون بواسون للاحتمالات، وحدود، وتحـــويلات إلـــى صيغ وقوانين أخرى يمكن الرجوع إليها في كتاب

Johnson, Kotz and Kemp (1992) .

(3.7.3) بعض تطبيقات توزيع بواسون للاحتمالات

يرى دوجلاس (Douglas (1980 أن توزيع بواسون يلعب دوراً بالنـــسبة إلى التوزيعات المتقطعة يشبه الدور الذي يلعبه التوزيـــع المعتـــدل بالنـــسبة إلـــى التوزيعات المتصلة.

(1) يستخدم توزيع بواسون في ضبط الجودة (Quality Control)، لعدد القطـــع المعيبة في الإنتاج.

(2) ويستخدم في إحصاءات بولتزمان ــ ماكسويل في الإحصاء الكمـــي ونظريـــة تصوير الصفائح.

(3) ولتوزيع بواسون استخدامات في مجالات البيئـــة والجيولوجيـــا، والجغرافيـــا والدراسات العمرانية في الإسكان.

(4) استخدامات توزيع بواسون للعد في وحدة المكان أو الحجم عديدة فضلاً عـــن استخداماته في وحدة الزمن. والاستخدامات في وحدة الزمن لها أهمية كبيرة، وخاصة في نظرية الطوابير، حيث يكون للفترات الزمنيـــة بـــين الأحـــداث

المتتابعة توزيعات أسية مستقلة ومتطابقة، ولذا فيكون عدد الأحداث التي تقع في فترة زمنية معينة خاضعاً لتوزيع بواسون.

(5) بين بارزن Parzen (1962)، المرجع [20] استخدامات توزيع بواسون في عد الدقائق المنبعثة من مواد مشعة، وعمليات المواليد (birth processes)، وعمليات أخرى هامة.

(6) كما أوضح تايلور وكارلن Taylor and Karlin (1984) في المرجع [23] تطبيقات توزيع بواسون في المجالات الهندسية، والبيولوجية، والطبية، ونظرية المخاطرة، والتجارة والديموجرافي (يسمى إحصاء سكاني).

(7) واستخدم توزيع بواسون في المعايرة البيولوجية (bioassay)، وعد مستعمرات البكتريا أو الفيروسات لدرجات تركيز مختلفة أو قيود تجريبية، والإصابات السرطانية، وإحصاء الوفيات والمواليد.

(8) كما طبق في الاقتصاد حيث اختبر توزيع بواسون مقابل توزيعات متقطعة أخرى مثل ذات الحدين السالب للاحتمالات.

(9) واستخدم التوزيع في مجالات أخرى عديدة مثل الزراعة، والتليفونات، وحوادث المركبات (سيارارت، قطارات، طائرات، بواخر ... الخ)، والاجتماع وانسيابية السيارات في المرور، والتطبيقات العسكرية.

تمارين (3)

(1) عندما نقوم بحساب جميع الكتل في توزيعات ذات الحدين (مثلا)، فإن الحسابات تصبح أكثر يسرا لو أننا بدأنا بحساب $p(0)$ ثم استخدمنا الصيغة التتابعية $p(x+1) = \frac{(n-x)\,p}{(x+1)\,q}\,.\,p(x)$.

حقق هذه الصيغة ثم استخدمها في حساب كتل قانون ذات الحدين بالبارامترين $(n = 7, p = 0.25)$.

(2) استخدم الصيغة التتابعية في السؤال (1) في إثبات أنه عندما تكون $p = \frac{1}{2}$ ، فإن توزيع ذات الحدين يأخذ نهاية عظمى عندما $x = \frac{n}{2}$ ، حيث n عدد زوجي، ونهاية عظمى عندما $x = \frac{n-1}{2}$ ، $x = \frac{n+1}{2}$ ، حيث n عدد فردي.

(3) إذا كانت $X \sim \text{bin}\ (n, p)$، فلأي قيمة من قيم p تأخذ دالة الكتلة $p(x)$ نهاية عظمى؟

(4) في تجربة إلقاء عملة احتمال ظهور الصورة عليها هو $P(H) = \frac{1}{3}$ خمس مرات، إذا اعتبرنا أن X يمثل عدد مرات ظهور الصور في الإلقاءات الخمسة المستقلة، فاكتب القانون الاحتمالي لعدد الصور، محدداً قيم x التي يصلح لها هذا القانون. إحسب الكتلة عند كل قيمة من هذه القيم، وحقق أن مجموع الكتل يساوي بالفعل واحداً.

(5) بافتراض أن احتمال أن يكون الطفل ذكرا هو 0.51، فاوجد احتمال أن يكون في أسرة مكونة من 4 أطفال :

(أ) ذكر واحد (ب) أنثى واحدة (جـ) على الأقل ذكر واحد

(د) على الأقل أنثى واحدة (هـ) ما هو القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأطفال الذكور في هذه الأسرة؟

(6) إعتبر احتمال الحصول على r على الأقل من مرات النجاح في x من محاولات برنوللي المستقلة التي يكون احتمال النجاح في أي منها p (واحتمال الفشل هو q=1 - p)، أي اعتبر $P[X \geq r]$ حيث $X \sim bin(n, p)$. إثبت أن هذا الاحتمال يمكن كتابته بدلالة دالة بيتا غير التامة كالآتي :

$$P[X \geq r] = r \binom{n}{r} \int_0^p t^{r-1} (1-t)^{n-r}\, dt$$

[**إرشاد** : استخدم التكامل بالتجزيء لتحقيق هذه النتيجة].

(7) إذا كانت $X \sim bin(n=20, p=0.4)$، فاحسب مستخدماً جدول (II) :

(أ) $P[X \leq 6]$ (ب) $P[X \geq 12]$ (جـ) $P[X = 8]$

(8) في اختبار التركيز المميت للمواد الكيميائية التي توجد في المياه الملوثة، تبين أن تركيزاً معيناً يقتل 20% من الأسماك التي تتعرض له لمدة يوم واحد.
فإذا وضعت عشرون سمكة في حوض يحتوي على هذا التركيز من المواد الكيميائية فما هو احتمال أنه بعد يوم واحد :

(أ) 14 تبقى حية، (ب) على الأقل 10 تبقى حية،
(جـ) 16 على الأكثر تبقى حية.

(9) يعمل نظام توجيه الصواريخ بشكل صحيح باحتمال وقدره p حين التشغيل وتثبيت أنظمة مستقلة ومتطابقة في كل صاروخ بحيث يكون احتمال أن يعمل نظام واحد على الأقل بصورة صحيحة هو على الأقل 0.99. إذا كانت n

ترمز لعدد أنظمة التوجيه في الصاروخ، فما هي قيمة n التي تحقق احتمال أن يعمل نظام واحد منها على الأقل بحيث (أ) $p = 0.9$ (ب) $p = 0.8$ ؟

(10) من بين المتبرعين بدمائهم إلى إحدى المستشفيات 80% عندهم دماء Rh^+. تبرع خمسة أشخاص في أحد الأيام بدمائهم إلى المستشفى. أوجد احتمال أن يكون :

(أ) على الأقل شخص واحد ليس عنده دماء Rh^+.

(ب) على الأكثر 4 أشخاص عندهم دماء Rh^+.

(11) في مسابقة للتوظيف في إحدى الشركات وجد أن 30% من المتقدمين عندهم تدريب متقدم في برمجة الكمبيوتر. فإذا اختبر المتقدمون في مقابلات شخصية واحدا تلو الآخر، فما هو احتمال أن يكون أول المتقدمين من الذين عندهم تدريب متقدم في برمجة الكمبيوتر هو خامس من قوبل في المقابلات الشخصية ؟

(12) (أ) إذا كان $X \sim Geom\ (0.1)$، فاحسب $P[X \geq 2]$.

(ب) إذا كان $Y \sim Nbin\ (r, p = 0.4)$، فاحسب $P[Y \geq 4]$ عندما

(i) $r = 2$، (ii) $r = 4$.

(13) إذا علمت أن 10% من الماكينات التي تعمل في أحد خطوط الإنتاج معطلة في أحد الأيام، وأن الماكينات تختبر عشوائياً واحدة تلو الأخرى، فاوجد احتمال أن تكون أول ماكينة غير معطلة هي ثاني الماكينات المختبرة.

(14) إذا كان ثلث المتبرعين بدمائهم إلى إحدى المستشفيات فصيلة دمائهم هي O^+، فاحسب احتمال أن :

(أ) أول من كانت فصيلة دمه O^+ هو رابع المتبرعين في أحد الأيام.

(ب) ثاني من كانت فصيلة دمه O^+ هو رابع المتبرعين في أحد الأيام.

(15) تحتوي مجموعة كبيرة من إطارات السيارات على نسبة 10% من الإطارات المعيبة، فإذا أردنا استخلاص أربع إطارات لتركيبها في إحدى السيارات :

(أ) ما هو احتمال اختيار ستة إطارات من المجموعة للحصول على أربعة جيدة ؟

(ب) ما هو احتمال اختيار ثمانية إطارات من المجموعة للحصول على أربعة جديدة ؟

(16) تبين إحدى الدراسات الجيولوجية أن آبار البترول الاستكشافية في منطقة بعينها يمكن أن يخرج منها بترولا باحتمال وقدره 0.2. أوجد احتمال أن :

(أ) أول بترول مستخرج هو من البئر الثالثة.

(ب) ثالث بترول مستخرج هو من البئر الخامسة.

(17) إحتمال أن يصاب طفل بأحد الأمراض المعدية هو 0.4. ما هو احتمال أن يكون الطفل العاشر الذي يتعرض للمرض هو الطفل الثالث الذي يصاب به ؟

(18) إثبت أنه إذا كان $T \sim Geom\ (p)$، فإن معدل التعطل يكون ثابتاً وقيمته p لجميع قيم t. [**إرشاد :** يعرف معدل تعطل (Failure Rate) جهاز عن العمل في الزمن t بأنه احتمال تعطل الجهاز في الزمن t إذا لم يكن الجهاز قد تعطل في الزمن $t - 1$ (لاحظ أن t هنا متقطعة)، أي أن معدل التعطل (ونرمز له بالرمز $h(t)$) هو : $h(t) = \dfrac{p(t)}{1 - F(t)}$، حيث $p(t)$ هي دالة

الكتلة الاحتمالية، $F(t)$ دالة التوزيع المقابلة عند الزمن t (أنظر الباب السادس)].

(19) إثبت أنه إذا كان $X \sim hyp\ (n, N, p)$، فإن :

$$p(x+1) = \frac{(n-x)(Np-x)}{(x+1)(Nq-n+x+1)}\, p(x)$$

استخدم هذه العلاقة لحساب قيم التوزيع فوق الهندسي للاحتمالات عندما $n = 4$، $N = 9$، $p = \frac{5}{9}$.

(20) من بين 16 متقدم لوظيفة ما، 10 يحملون شهادة جامعية. إذا اختير ثلاثة متقدمين عشوائياً للمقابلة الشخصية، ما هو احتمال أن يكون من بين الثلاثة المختارين :

(أ) لا أحد يحمل شهادة جامعية، (ب) واحد يحمل شهادة جامعية،

(جـ) إثنان يحملان شهادة جامعية، (د) الثلاثة يحملون شهادة جامعية.

(21) إثبت أن: $q = 1 - p$ ،

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \right] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

(22) قارن بين تقريب بواسون والقيم الفعلية لذات الحدين في الحالات الآتية :

(أ) $P[X = 2]$، عندما $(n = 8, p = 0.1)$،

(ب) $P[X = 9]$، عندما $(n = 10, p = 0.95)$،

(جـ) $P[X = 0]$، عندما $(n = 10, p = 0.1)$،

(د) $P[X = 4]$، عندما $(n = 9, p = 0.2)$.

(23) إذا كان $X \sim \wp(\lambda)$ ، فاوجد صيغة تتابعية بكتابة $p(x+1)$ بدلالة $p(x)$، ثم أوجد كتل بواسون بالبارامتر $\lambda = 2$.

(24) إذا كان عدد الحوادث التي تقع على أحد الطرق السريعة كل يــوم يخــضع لتوزيع بواسون بالبارامتر $\lambda = 3$ أوجد احتمال :
(أ) عدم وقوع حوادث اليوم (ب) وقوع ثلاثة حوادث على الأقل اليوم.

(25) يتكون اختبار من خمسة أسئلة، كل سؤال يشتمل على ثلاث إجابـــات، واحد فقط هو الصحيح. ما هو احتمال إجابة طالب عن أربعـــة أســـئلة صحيحة بمجرد التخمين ؟

(26) إذا علمت أن 10% من قطع الغيار التي ينتجها أحد المصانع معيبـــة. أوجد إحتمال أنه في عينة عشوائية من 10 قطع مـــسحوبة مـــن إنتـــاج المصنع، تكون قطعتان منها معيبة باستخدام (أ) توزيـــع ذات الحـــدين، (ب) تقريب توزيع بواسون.

(27) تعاد ماكينات التصوير المستعملة إلى المورِّد، لتنظيفها وإعادتها إلـــى أصحابها بعد كتابة عقد جديد، ولأنه لم تتم صيانة كاملة للماكينات، فإن بعضها يكون قابلاً للتعطل. فإذا كان من 8 ماكينات تـــصوير 3 تكـــون قابلة للتعطل. أراد أحد مستخدمي هذه الماكينات كتابـــة أربعـــة عقـــود جديدة، ما هو احتمال أن يكون من بين الماكينات الأربعة في فترة العقد:
(أ) كلها غير قابلة للتعطل، (ب) على الأقل واحدة قابلة للتعطل.
(جـــ) 3 قابلة للتعطل.

(28) مؤسسة تمتلك ستة مصانع منها 4 في نفس المدينة ومصنعان خارج المدينة. إذا اختير ثلاثة مصانع عشوائيا، فما هو احتمال أن يكون :

(أ) مصنع واحد على الأقل من خارج المدينة.

(ب) المصانع الثلاثة في نفس المدينة.

(29) عدد مستعمرات البكتريا من نوع معين في عينات لمياه ملوثة يخضع لتوزيع بواسون بالبارامتر $\lambda = 2$ لكل سنتيمتر مكعب.

(أ) إذا اختيرت 4 عينات مستقلة من هذه المياه (كل منها سنتيمتر مكعب). فاوجد احتمال أن تحتوي عينة واحدة على الأقل على مستعمرة واحدة أو أكثر من مستعمرات البكتريا.

(ب) ما هي قيمة λ التي تجعل احتمال احتواء عينة واحدة على الأقل على مستعمرة بكتريا مساوية 0.95 تقريباً ؟

(30) يحتوي مخزن على عشرة ماكينات للطباعة من بينها 4 متعطلة. تختار شركة خمسة ماكينات عشوائيا بغرض شرائها. ما هو احتمال أن تكون الماكينات الخمس المختارة جيدة ؟

(31) إذا كان $X \sim \wp(\lambda)$ ، فأوجد قيمة λ التي تجعل كتلة بواسون $p(x)$ أكبر ما يمكن ؟

(32) تحتوي شحنة كبيرة من الكتب على 3% منها تجليدها معيب. استخدم تقريب بواسون لحساب احتمال أن من بين 400 كتاب مختارة عشوائيا من شحنة الكتب أن :

(أ) 10 كتب تجليدها معيب ، (ب) على الأقل 10 كتب تجليدها معيب.

(33) إذا كان : $X \sim \wp(\lambda)$، وكان $P[X=0] = 0.2$ فاحسب $P[X > 2]$.

(34) إذا كـــان $X \sim \wp(\lambda)$، وكـــان $P[X = 1] = 0.3$ ، $P[X = 2] = 0.2$
فاحسب $P[X = 0]$، $P[X = 3]$.

(35) يخضع عدد الدقائق المنبعثة من مصدر اشعاعي خلال فترة زمنيـــة معينـــة لقانون بواسون. إذا كان احتمال عدم انبعاث أي دقائق هو $\frac{1}{3}$، فمـــا احتمـــال انبعاث اثنين على الأقل من الدقائق؟

الباب الرابع

بعض دوال الكثافة الاحتمالية الهامة

سنعرض في هذا الباب بعض القوانين الاحتمالية الهامة لمتغيرات عشوائية متصلة وخصائصها وتطبيقاتها. هذه القوانين هي :

(4.1) القانون الاحتمالي المنتظم المتصل

(4.2) القانون المعتدل (أو قانون جاوس)

(4.3) قانون اللوغاريتم المعتدل

(4.4) قانون جاما للاحتمالات

(4.5) قانون بيتا للاحتمالات

(4.6) قانون وايبل للاحتمالات

(4.7) قوانين بارتيو للاحتمالات

(4.8) قانون كوشي للاحتمالات

(4.9) قانون t للاحتمالات

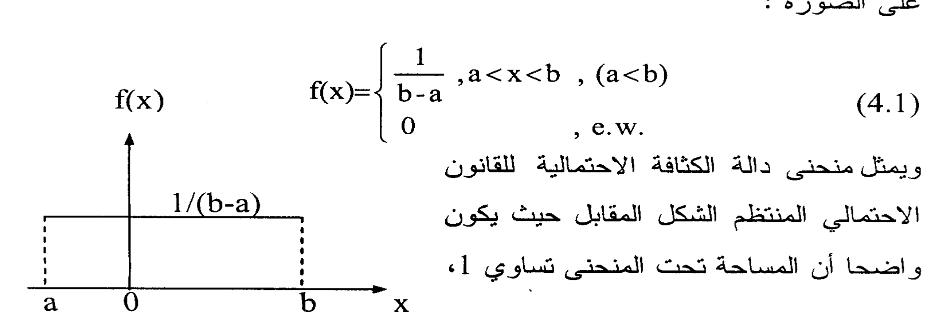
(4.10) قانون F للاحتمالات

(4.1) القانون الاحتمالي المنتظم المتصل
Continuous Uniform Probability Law

لعل أول استخدام لهذا القانون يعود إلى بييز Bayes (1763).

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع للقانون الاحتمالي المنتظم المتصل على الفترة (a, b)، ونكتب $X \sim Unif\,(a, b)$، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية على الصورة :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b \ , \ (a<b) \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.1)$$



ويمثل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الاحتمالي المنتظم الشكل المقابل حيث يكون واضحا أن المساحة تحت المنحنى تساوي 1،

(مساحة مستطيل طوله (b-a) وعرضه $\frac{1}{b-a}$)

ودالة التوزيع (التراكمية) المقابلة لدالــة الكثافة الاحتمالية (4.1) هي :

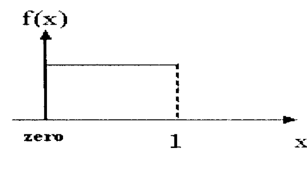
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases} \qquad (4.2)$$

ونلاحظ أن :

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} du = \frac{x-a}{b-a} \ , \ a \le x < b .$$

كما أن : $F(x) = 0$ إذا كانت $x < a$، $F(x) = 1$ إذا كانت $x \ge b$.

الحالـــة الخاصـــة التي تكـــون فيها $a = 0$ ، $b = 1$ لها أهمية كبرى، حيث نكتب $X \sim Unif\,(0, 1)$، إذ يخضع المتغير العشوائي X لقانون الاحتمال المنتظم المتصل على الفترة (0, 1)، وتكون دالة الكثافة في هذه الحالة هي :



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} \qquad (4.3)$$

ودالة التوزيع المقابلة هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 , \\ x & , 0 \le x < 1 , \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases} \qquad (4.4)$$

ومن أهم تطبيقات هذه الحالة الخاصة، استخدامها في توليـــد بعـــض المتغيـــرات العشوائية. يوجد في تمارين (4) [المسألة رقم (7)] أنه إذا كان $U = F(X)$ حيث تمثل F دالة التوزيع لأي متغير عشوائي X، فإن $U \sim Unif\,(0, 1)$. لذلك فـــإن

$X = F^{-1}(U)$ يكون خاضعا للقانون الاحتمالي ذي التوزيع F. لنفترض – على سبيل المثال – أننا نريد توليد متغير عشوائي يخضع للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر $\beta = 2$. سنرى فيما بعد أن دالة التوزيع للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر $\beta = 2$ هي $F(x) = 1 - e^{-2x}, x > 0$ فإذا كانت $u = F(x) = 1 - e^{-2x}$ ، فإن $X = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - U}}\right)$ يكون خاضعا للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر $\beta = 2$

فمثلا إذا كانت $u = 0.144$ فإن $x = 2.947$ تكون إحدى قيم متغير عشوائي يخضع للتوزيع الأسي للاحتمالات بالبارامتر $\beta = 2$ ، وهكذا، يمكن توليد قيم متغيرات عديدة خاضعة للتوزيع الأسي للاحتمالات بالبارامتر β ، حيث :

$F(X) = 1 - e^{-\beta X}$ ، فإذا كانت $U = F(X) = 1 - e^{-\beta X}$ فإن

$X = -\frac{1}{\beta}\ln(1 - U)$ يكون خاضعا للتوزيع الأسي للاحتمالات بالبارامتر β .

وبالمثل فإنه يمكن توليد متغيرات عشوائية من قوانين أخرى (غير الأسي) إذا أمكن إيجاد $F^{-1}(U)$ ، لأي عدد $U \sim Unif(0, 1)$.

وللقانون الاحتمالي المنتظم المتصل تطبيقات عديدة فضلا عن توليد العينات من بعض التوزيعات الأخرى. فاستخدم هذا القانون مثلا في العينات الطبقية، وفي تحديد دوال القوة (power functions) لاختبارات العشوائية، كما أن له تطبيقات عديدة في الاختبارات اللابارامترية (nonparametric tests) مثل اختبار كلموجوروف – سميرنوف (Kolmogorov - Smirnov)، واستخدم القانون في نماذج التعرض للحوادث، وله تطبيقات في الفيزياء.

وقد وجدت تطبيقات هامة للقانون الاحتمالي المنتظم المتصل في مجالات اختبارات الحياة، وانسياب المركبات في الطرق المرورية.

واستخدم القانون في التقسيم العشوائي للمتغيرات، ولبساطته فقد أمكن إيجاد توزيعات أخرى باستخدامه. فمثلا، تم إيجاد توزيع خارج قسمة متغير عشوائي X يخضع للقانون الاحتمالي المنتظم إلى متغير عشوائي Y مستقل عن X ويخضع للتوزيع المعتدل، أي تم إيجاد توزيع $Z=\frac{X}{Y}$ حيث X ، Y مستقلان، $X \sim Unif.$ ، $Y \sim Normal$.

وهناك علاقة بين متغير عشوائي T يخضع للتوزيع الاحتمالي المنتظم حول نصف دائرة، وتوزيع متغير عشوائي X يخضع لتوزيع كوشي على الخط المستقيم.

مثال (4.1) : إذا كان $X \sim Unif(\alpha, \beta)$ ، فاثبت أن

$$P[X < \alpha + p(\beta - \alpha)] = p$$

الحل :

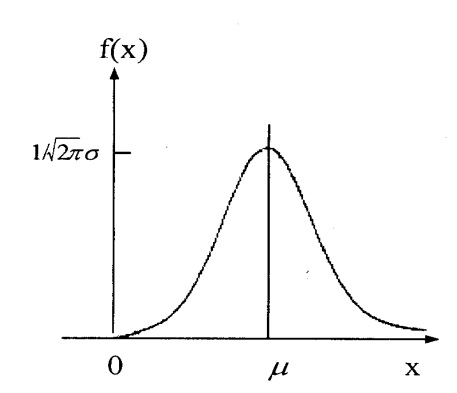
$$X \sim Unif(\alpha, \beta) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & , \alpha < x < \beta, \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

$$\Rightarrow P[X < \alpha + p(\beta - \alpha)] = \int_{\alpha}^{\alpha + p(\beta - \alpha)} \left(\frac{1}{\beta - \alpha}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\beta - \alpha}[\{\alpha + p(\beta - \alpha)\} - \alpha]$$
$$= p.$$

(4.2) القانون المعتدل (أو قانون جاوس)
Normal (or Gauss) Probability Law

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع للقانون المعتدل (أو قانون جاوس) بالبارامترين (μ, σ^2)، ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} , -\infty < x < \infty , (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0). \quad (4.5)$$



لرسم منحنى الدالـــة فـــي (4.5)، فإننـــا نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ نهايـــة عظمـــى عندما $x = \mu$ ، وتكون أكبر قيمة للدالـــة

هي : $f(\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

كذلك فإن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \pm\infty$.

والمنحنى متصل عند جميع قيم x الحقيقية،

ومتماثل حول المستقيم الرأسي $x = \mu$ ، لذلك فإنه يمكن رسمه كما في الشكل.

سنثبت في الباب التالي أن "متوسط" القانون هو μ وأن "تباين" القانون هو σ^2 ، لذلك فإن بارامتري القانون (μ, σ^2) يمثلان متوسط وتباين القانون.

ويمكن إثبات أن الدالة $f(x)$ المعطاة بالمعادلة (4.5) تمثل كثافة احتمالية وذلك بتحقيق أن : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

وباستخدام التعويض $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ فإن $dz = \dfrac{dx}{\sigma}$ ويصبح المطلوب هو إثبات أن :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,dz$$

خيث

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\,, -\infty < z < \infty \qquad (4.6)$$

ونقول إن المتغيـــر العشوائي $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ يخضع للتوزيع المعتدل بالبـــارامترين (0, 1)، ونكتب $Z \sim N(0, 1)$.

فيكون إثبات أن f(x) في (4.5) تمثل كثافة احتمالية مكافئا لإثبات أن $\varphi(z)$ تمثل كثافة احتمالية، حيث $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I,$$

حيث :

$$I = \int_0^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz$$

فيكون :

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(z^2 + w^2)/2}\, dz\, dw$$

وباستخدام التحويل $y = r\sin\theta$ ، $x = r\cos\theta$ ، $dx\,dy = J\,dz\,dw$

حيث

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

لذلك فإن $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$، ويصبح :

$$I^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(-e^{-r^2/2}\right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

فتكون : $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ويصبح $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 1$ ، و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

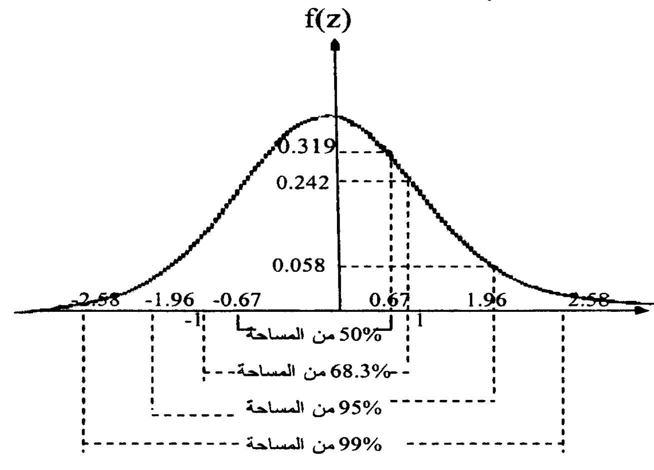
ويمكن حساب التكامل I باستخدام التعويض $\frac{z^2}{2} = w$ ، فيكون $z = \sqrt{2w}$ ، $dz = \frac{dw}{\sqrt{2w}}$، ويصبح :

$$I = \int_0^{\infty} e^{-w} \frac{dw}{\sqrt{2w}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} w^{-1/2} e^{-w}\, dw = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

يمكننا استخلاص النظرية الآتية مما سبق :

نظرية (4.1): إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$، وكان $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$، فإن $Z \sim N(0, 1)$

هذه النظرية لها أهمية كبرى في حساب المساحات تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية $\varphi(z)$ في (4.5). يسمى $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ التحويل المعياري، والكثافة الاحتمالية f(z) في (4.6) بالقانون المعتدل المعياري، والمنحنى الممثل في الشكل المنحنى المعتدل المعياري.



المساحة تحت دالة الكثافة للقانون المعتدل المعياري

إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$، فإن دالة التوزيع هي :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dy\ ,\ z=\frac{y-\mu}{\sigma}$$

$$=\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (4.7)$$

حيث يعرف التكامل

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}\, dv \qquad (4.8)$$

بالتكامل المعتدل المعياري (standard normal integral)، وهـو يمثـل دالـة التوزيع للقانون المعتدل المعياري $N(0,1)$، أو المساحة تحت الكثافة المعيارية حتى z.

لذلك فإنه من (4.7) نلاحظ أنه يمكن كتابة المساحة تحـت المنحنـى المعتـدل $N(\mu,\sigma^2)$ حتى x بدلالة المساحة تحت المنحنى المعتدل المعيـاري $N(0,\ 1)$ حتى $\frac{x-\mu}{\sigma}$. والنظرية الآتية تعطي المساحة تحت المنحنى المعتدل $N(\mu,\sigma^2)$ بين أي خطين رأسيين $x = a$ ، $x = b$ بدلالة المساحة تحت المنحنـى المعتـدل المعياري.

نظرية (4.2) : إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ، فإن :

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (4.9)$$

البرهان :

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \ , z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

ونظراً لأن المنحنى المعتدل المعياري يكون متماثلا حول المحور الرأسي، فإن

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad (4.10)$$

والمساحات تحت المنحنى المعياري كما هو مبين في الـشكل، حيـث نلاحـظ أن نصف المساحة يقع بين النقطتين $z = -0.67$، $z = 0.67$.

68.3% من المساحة يقع بين نقطتي الانقلاب : $z = -1$ ، $z = +1$.

95% من المساحة يقع بين النقطتين $z = -1.96$ ، $z = 1.96$.

99% من المساحة يقع بين النقطتين $z = -2.58$، $z = 2.58$.

هذه المساحات يمكن حسابها باستخدام الجدول (IV) في ملحق (E)، فمثلا، إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن نقطتي الانقلاب تكونان هما :

$$x = \mu - \sigma \ , x = \mu + \sigma$$

وهما ــ باستخدام التحويل $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ــ تناظران النقطتين $z = 1 \ , z = -1$ والمساحة بين هاتين النقطتين هي ــ باستخدام نظرية (4.2) ــ

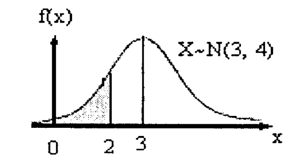
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2(0.3413) = 0.6826 \ .$$

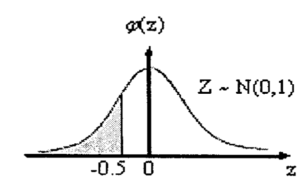
مثال (4.2) : إذا كان $X \sim N(3, 4)$ ، فاحسب :

(i) $P(X < 2)$, (ii) $P(1 < X < 4)$, (iii) $P(X > 5)$,

(iv) $P(|X| < 1 \mid 0 < x < 2)$.

الحل :





$$\mu = 3 , \sigma^2 = 4 \Leftarrow X \sim N(3, 4)$$

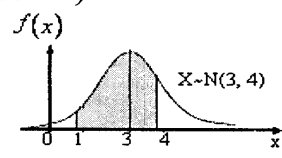
لذلك فإن $z = \frac{x - 3}{2}$ يحول المنحنى المعتدل بالبـارامترين (3,4) إلـى المنحنـى المعتـدل المعيـاري $N(0,1)$. وقيمـة $x = 2$ تقابلهـا

$$. z = \frac{2 - 3}{2} = -0.5$$

لذلك فإن المساحة تحت المنحنى المعتدل N(3,4) حتى x = 2، تساوي المساحة تحت المنحنى المعتدل المعياري N(0,1) حتى z = - 0.5، وتكون :

(i) $P(X < 2) = P(Z < -0.5) = 0.3085.$

(ii) $P(1 < X < 4)$



التحويل $z = \dfrac{x - 3}{2}$ يأخذ النقطتين x = 1، x = 4 إلى النقطتين المناظرتين z = -1 ، z = 0.5

لذلك فإن :

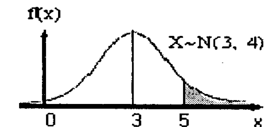
$P(1 < X < 4) =$

$P(-1 < Z < 0.5)$

$$P[1 < X < 4] = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = 0.6915 - 0.1587 = 0.5328$$

(iii) $P(X > 5)$ التحويل $z = \dfrac{x - 3}{2}$ يأخذ النقطة x = 5 إلى النقطة z = 1

لذلك فإن :

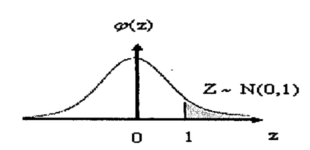


$P(X > 5) = P(Z > 1)$

$= 1 - \Phi(1)$

$= 1 - 0.8413$

$= 0.1587$



$$(iv)\ P(|\,x\,|<1\,|\,0<X<2\,)=\frac{P(-1<X<1\,,\,0<X<2)}{P(0<X<2)}$$

$$=\frac{P(0<X<1)}{P(0<X<2)}=\frac{P(-1.5<Z<-1)}{P(-1.5<Z<-0.5)}$$

$$=\frac{\Phi(-1)-\Phi(-1.5)}{\Phi(-0.5)-\Phi(-1.5)}=\frac{0.1587-0.0668}{0.3085-0.0668}=\frac{0.0919}{0.2417}=0.38\,.$$

مثال (4.3) : إذا كانت $X \sim N\,(2,\,9)$، فاوجد العدد a الذي يجعل

$$P(X>a\,)=2\,P(X\le a)$$

الحل : $Z=\dfrac{X-2}{3}$ يحول النقطة $x=a$ إلى النقطة $z=\dfrac{a-2}{3}$، فتصبح

$$P(X>a)=P\left(Z>\frac{a-2}{3}\right)=1-P\left(Z\le\frac{a-2}{3}\right)=1-\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right),$$

$$P(X\le a)=P\left(Z\le\frac{a-2}{3}\right)=\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right),$$

$$P(X>a)=2\,P(X\le a)\Rightarrow$$

$$1-\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right)=2\,\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right)\Rightarrow\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{a-2}{3}=-0.43$$

$$\Rightarrow\quad a=2-1.29=0.71$$

مثال (4.4) : إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، وأردنا إيجاد

$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$ فإنه باستخدام نظرية (4.2) تصبح

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

ونظرا لأن $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$ ، فإن

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) = 2\,\Phi(k) - 1 .$$

ونلاحظ أن هذا الاحتمال لا يعتمد على μ أو σ .

مثال (4.5) : مقاومة الأسلاك التي تنتجها إحدى الشركات لتصنيع أجهزة كمبيوتر تتراوح بين 0.13، 0.15 أوم. فإذا كانت المقاومة الفعلية للأسلاك التي تنتجها الشركة تخضع للتوزيع المعتدل بمتوسط 0.14 أوم وانحراف معياري 0.005 أوم.

(أ) ما هو احتمال أن يقابل أحد الأسلاك المختارة عشوائيا المواصفات المحددة للمقاومة؟

(ب) إذا استخدمت خمسة أسلاك مختارة عشوائيا في تصنيع أحد الكمبيوترات، فما هو احتمال أن تقابل هذه الأسلاك الخمسة مواصفات المقاومة؟

الحل : (أ) المتغير العشوائي X يخضع للقانون المعتدل ذي البارامترين $\mu = 0.14$ ، $\sigma = 0.005$. والمطلوب حساب : $P(0.13 < X < 0.15)$

التحويل : $z = \dfrac{x - 0.14}{0.005}$ يحول النقطتين x = 0.13، x = 0.15 إلى النقطتين z = -2، z = 2، لذلك فإن :

$$P(0.13 < X < 0.15) = P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$
$$= 2\,\Phi(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544$$

(ب) الأسلاك الخمسة مستقلة في مقاومتها عن بعضها، واحتمال أن تقابل هـذه الأسلاك الخمسة مواصفات المقاومة هو احتمال أن تقابل جميعها المواصفات، ويكون هذا الاحتمال مساوياً

$$(0.9544)^5 = 0.7919 .$$

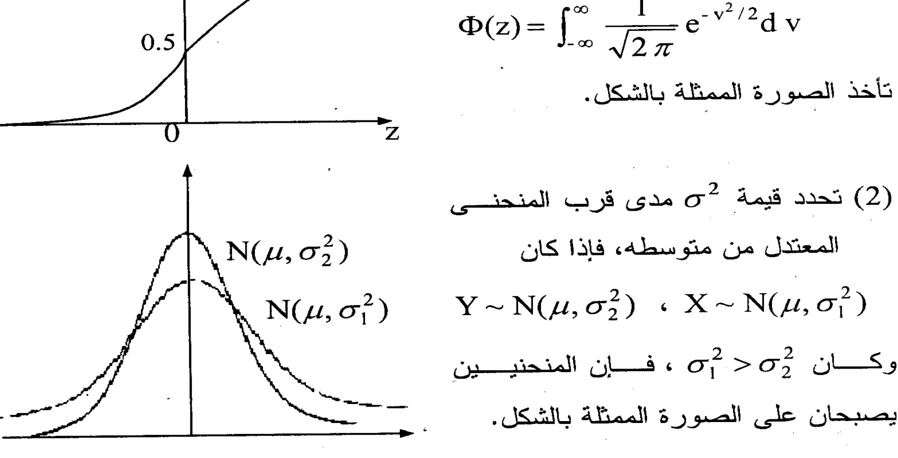
(4.2.1) بعض خصائص التوزيع المعتدل وتطبيقاته

لعل التوزيع المعتدل يكون مـن أهـم التوزيعـات الإحـصائية عمومـاً، لخصائصه النظرية ولتطبيقاته المتعددة في مجالات مختلفة، على رأسها مجـالات الفلك، هذا فضلاً عن أن التوزيع المعتدل ينفرد بخاصية إمكانية استخدامه كتقريب لتوزيعات أخرى (نظرية النهاية المركزية central limit theorem).

(1) دالة التوزيع المعتدل المعيـاري (أو التكامل المعتدل المعياري) :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} d v$$

تأخذ الصورة الممثلة بالشكل.



(2) تحدد قيمة σ^2 مدى قرب المنحنـى المعتدل من متوسطه، فإذا كان

$$Y \sim N(\mu, \sigma_2^2) \quad ، \quad X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$$

وكــان $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ، فــإن المنحنيــين يصبحان على الصورة الممثلة بالشكل.

(3) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، وكان $Z = a\,X + b$، حيث $a \neq 0$ فإنه يمكن إثبات أن $Z \sim N(a\,\mu + b, a^2\sigma^2)$. ومن ذلك فإنه إذا كان $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$، فإن $a = \frac{1}{\sigma}$، $b = -\frac{\mu}{\sigma}$، لذلك فإن : $Z \sim N(0, 1)$.

لاحظ أنه إذا كان $Z = a\,X + b$، فإن :

$$F_Z(z) = P[\,Z \leq z\,] = P[\,a\,X + b \leq z\,] = P\left[X \leq \frac{z - b}{a}\right] = F_X\left(\frac{z - b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{z - b}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - b - \mu a}{a\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\eta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \nu}{\eta}\right)^2}$$

حيث $\nu = a\,\mu + b$، $\eta^2 = a^2\,\sigma^2$. أي أن $Z \sim N(\,a\,\mu + b, a^2\,\sigma^2\,)$.

(4) إذا كان $X \sim \text{bin}\ (n, p)$، وإذا كان $Z = \frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$، فإنه يمكن إثبات أنه لقيم n الكبيرة، فإن Z يؤول إلى $N(0, 1)$. (أنظر بارزن (Parzen (1962 المرجع [17] صفحة 241 حيث يستخدم صيغة ستيرلنج للمضروب [(A.18) في ملحق (A)] في التقريب)، وتقريب توزيع ذات الحدين بالبارامترين (n , p) بالتوزيع المعتدل بالبارامترين (0, 1) يعزي إلى دي موافر (de Moivre (1733 حيث ذكره عندما $p = \frac{1}{2}$، ثم أثبته من بعده لابلاس Laplace في عام 1812 لأي قيمة بارامتر p.

(5) إذا كان $X \sim \wp(\lambda)$، وكان $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$، فإنه يمكن إثبات أنه لقيم λ الكبيرة، فإن Z يؤول إلى $N(0, 1)$. [حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية].

(6) تطبيقات التوزيع المعتدل متعددة في كافة المجالات، إذ أن نظرية النهاية

المركزية تجعل من التوزيع المعتدل تقريباً لتوزيع أي مجتمع من المجتمعات (سواء كان متصلاً أو متقطعاً)، وذلك بافتراض أن عدد أعضاء المجتمع يكون كبيراً كبراً كافياً.

(7) هناك ظواهر تخضع بالضبط للتوزيع المعتدل وبلا تقريب، ومثال ذلك سرعة تحرك جزئ كتلته M لغاز في أي اتجاه معطى عند درجة حرارة مطلقة، والتي تخضع – طبقا لقانون ماكسويل للسرعات – للقانون المعتدل بالبارامترين $\mu = 0$ ، $\sigma^2 = M / k T$ ، حيث k ثابت يسمى ثابت بولتزمان (Boltzman's constant).

مثال (4.6) : استخدم تقريب ذات الحدين بالتوزيع المعتدل لإيجاد احتمال إبادة عدد من الناموس يتراوح بين 70، 90 ناموسة من 100 باستخدام مبيد جديد إذا كان احتمال إبادة أي من الناموس هو 0.8.

الحل : المتغير العشوائي X يخضع لقانون ذات الحدين بالبارامترين n = 100، p=0.8. فيكون المطلوب هو حساب : P[70< X <90] حيث X~bin(100,0.8)

حيث $\mu = n\,p$ ، $\sigma^2 = n\,p\,q$. أي أن: $\mu = (100)(0.8) = 80$ ،

لذلك فإن $\sigma^2 = n\,p\,q = 16$:

$$P[70 < X < 90] \cong P\left[\frac{70-80}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{90-80}{4}\right]$$
$$= P[-2.5 < Z < 2.5],\ Z \sim N(0,1).$$

وباستخدام جدول (IV)، فإن $P[-2.5 < Z < 2.5] = 0.9876$، وعلى ذلك فإن :

$$P[70 < X < 90] \cong 0.9876$$

مثال (4.7) : إذا كان معدل وصول الزبائن إلى شباك أحد البنوك هو $\lambda = 10$ أشخاص في الساعة، حيث يخضع عدد الزبائن الذي يصلون إلى هذا الشباك لقانون بواسون بالبارامتر λ . ما هو احتمال أن يزيد طول

الطابور عن 40 شخصاً في 3 ساعات؟

الحل : إذا مثل المتغير العشوائي X طول الطابور في الساعة فإن X_t هو طول الطابور في t ساعة، ومعدل وصول الزبائن إلى الطابور في 3 ساعات هو $\lambda^* = \lambda t = (10)(30) = 30$ ويكون المطلوب هو حساب $P[Y > 40]$ حيث $Y \sim \wp(30)$.

ويمكن حساب هذا الاحتمال باستخدام التقريب للتوزيع المعتدل بالبارامترين (μ, σ^2) حيث $\mu = \lambda^* = 30$ ، $\sigma^2 = \lambda^* = 30$. لذلك فإن :

$$P[Y > 40] = P\left[\frac{Y - \lambda}{\sqrt{\lambda}} > \frac{40 - 30}{\sqrt{30}}\right] = P[Z > 1.83]$$
$$= 1 - P[Z \leq 1.83] = 1 - 0.9664 = 0.0336$$

(4.3) قانون اللوغاريتم المعتدل للاحتمالات

Lognormal Probability Law

من أشهر التحويلات المستخدمة لاستحداث توزيعات جديدة من توزيعات أخرى معروفة، التحويلات اللوغاريتمية. فإذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي Y يخضع للقانون المعتدل بالبارامترين (μ, σ^2)، واستخدمنا التحويل : $Y = \ln X$، فإن المتغير العشوائي X يقال إنه يخضع لقانون اللوغاريتم المعتدل بالبارامترين (μ, σ^2)، ونكتب ـ أحيانا ـ $X \sim \wedge(\mu, \sigma^2)$ ـــ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا القانون على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] & , x > 0, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \tag{4.11}$$

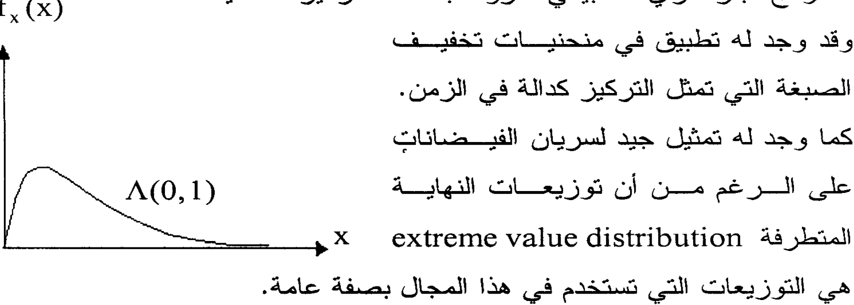
حيث $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$

ويمكننا طبعا إدخال بارامتر موقع بكتابة $x - \delta$ مثلا بدلا من x حيث $x > \delta$.

(4.3.1) بعض استخدامات قانون اللوغاريتم المعتدل

ربما يكون جالتون (1879) Galton هو أول من لفت الأنظار إلى قانون اللوغاريتم المعتدل. وقد استخدم قانون اللوغاريتم المعتدل ـــ على مر السنين ـــ في مجالات متعددة، فوجد تطبيقات في مجال الصيدلة (bioassay)، وفي الجيولوجيا (particle size)، وفي الزراعة، والبيولوجي.

وقد استخدم قانون اللوغاريتم المعتدل ذو البارامترات الثلاثة (μ,σ^2,δ) في نمذجة درجات الذهب واليورانيوم في الجيولوجيا، حتى أنه أصبح يعتبر الآن النموذج البارامتري "الطبيعي" للرواسب ذات التركيز الضعيف.



وقد وجد له تطبيق في منحنيات تخفيف الصبغة التي تمثل التركيز كدالة في الزمن. كما وجد له تمثيل جيد لسريان الفيضانات على الرغم من أن توزيعات النهاية المتطرفة extreme value distribution هي التوزيعات التي تستخدم في هذا المجال بصفة عامة.

وأما الاستخدامات الطبية فمنها أوزان الأطفال، وتكون مراجع الأعمار النوعية للمتغيرات الإكلينيكية وتركيز المضادات الجسدية (antibodies).

وقد استخدم مجموع المتغيرات المستقلة الذي يخضع لتوزيع اللوغاريتم المعتدل في مجال الاتصالات الهندسية، ودراسة تأثير الهواء على إشارات الرادار، حيث تخضع ذرات الأتربة لتوزيع اللوغاريتم المعتدل.

ولقد وجد أن هذا التوزيع يمكن أن يكون منافساً فعلياً لتوزيع وايبل في مجال اختبارات الحياة، كما استخدم في ضبط الجودة، وتوزيعات الدخول، وتوزيعات النجوم في الكون، كما استخدم في توزيع الثروة.

وقد استخدم التوزيع في بعض التقريبات المتعلقة بتوزيع فيشر، و"مسارات التباينات" وله تطبيقات في التأمين، والعلاقة بين الشركات وخروج موظفيها منهـــا، والهستوجرامات الهامشية لأوزان الأشخاص في المجتمعات.

إذا كان $X \sim \wedge(\mu, \sigma^2)$، فإن دالة توزيع X المقابلة للكثافة (4.11) هي :

$$F(x) = P[X \le x] = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), x > 0 \ , \qquad (4.12)$$

حيث :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

هو التكامل المعتدل المعياري.

مثال (4.8) : إذا كانت $X \sim \Lambda(1, 4)$ فاحسب :

(i) $P[X < 10]$, (ii) $P[6 < X < 11]$, (iii) $P[X > 9]$

الحل :

(i) $P[X < 10] = \Phi\left(\frac{\ln 10 - 1}{2}\right) = \Phi(0.65) = 0.7422.$

(ii) $P[6 < X < 11] = F(11) - F(6) = \Phi\left(\frac{\ln(11) - 1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(6) - 1}{2}\right)$

$= \Phi(0.69) - \Phi(0.39) = 0.7549 - 0.6517 = 0.1032$

(iii) $P[X > 9] = 1 - P[X \le 9] = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(9) - 1}{2}\right) = 1 - \Phi(0.59)$

$= 1 - 0.7224 = 0.2776$

(4.4) قانون جاما للاحتمالات Gamma Probability Law

يخضع متغير عشوائي X لقانون جاما للاحتمالات بالبـــارامترين α، β، ونكتب $X \sim G(\alpha, \beta)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X على الصورة :

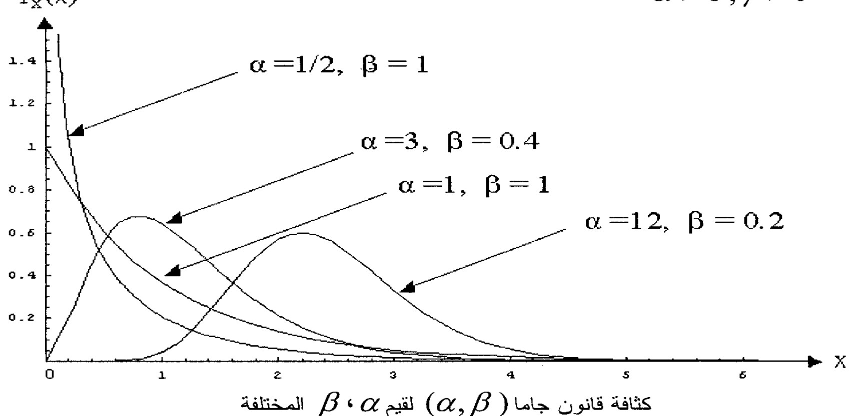
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} & , x > 0 \\ 0 & , e.w. \end{cases} \qquad (4.13)$$

حيث $\alpha > 0\,, \beta > 0$.

وتأخذ الكثافة الاحتمالية (4.13) صورة أخرى بكتابة البارامتر β بحيث يــصبح مثلاً $\beta = \dfrac{1}{\gamma}$ ، فتكون الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\gamma x} & , x > 0 \\ 0 & , e.w. \end{cases} \qquad (4.14)$$

حيث $\alpha > 0\,, \gamma > 0$.



كثافة قانون جاما (α, β) لقيم α ، β المختلفة

البارامتر β (أو γ) يسمى بارامتر المقياس (scale parameter) وهو لا يغير من شكل المنحنى بينما البارامتر α فيسمى بارامتر الشكل (shape parameter) إذ أنه يغير من شكل المنحنى.

وبغض النظر عن قيمة β فإنه إذا كان $X \sim G(\alpha, \beta)$ ، تأخذ منحنيات كثافة قانون جاما بالبارامترين (α, β) الصورة الممثلة في الشكل. وعلى وجه العموم، يمكن إثبات أن :

(1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية يكون تناقصياً باطراد على الفترة $(0, \infty)$ إذا كانت $0 < \alpha \le 1$.

(2) إذا كانت $\alpha > 1$ ، فإن منحنى دالة الكثافة الاحتمالية يتزايد حتى يصل إلى نهاية عظمى عند $x = \beta(\alpha - 1)$ ثم يتناقص إلى الصفر على طول الفترة $(\beta(\alpha - 1), \infty)$.

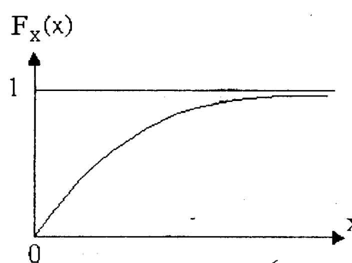
ويمكن إدخال بارامتر موقع (location parameter) δ مثلا على أي من (4.13) أو (4.14)، (سنقصر تعاملنا على الصورة (4.13)، والصورة (4.14) تعامل بالمثل)، حيث تكتب دالة الكثافة على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} (x - \delta)^{\alpha - 1} e^{-(x-\delta)/\beta}, & x > \delta, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \tag{4.15}$$

حيث $\alpha, \beta, \delta > 0$.

دالة التوزيع المقابلة للكثافة الاحتمالية (4.13) هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \int_0^x v^{\alpha - 1} e^{-v/\beta}\, dv, & x \ge 0 \end{cases} \tag{4.16}$$



التكامل في (4.16) يمكن إيجاده بالطرق العددية إلا إذا كانت α عددا صحيحا موجبا، فإنه بكتابة $F(x) \equiv F(x;\alpha,\beta)$ ، واستخدام التكامل بالتجزيء، يمكن إثبات أن :

$$F(x;\alpha,\beta) = F\left(\frac{x}{\beta};\alpha-1,1\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

وبملاحظة أن : $F\left(\frac{x}{\beta};1,1\right) = 1 - e^{-x/\beta}$, يمكن إثبات أنه عندما تكون α عددا صحيحا موجبا، فإن :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \int_0^x v^{\alpha-1} e^{-v/\beta}\, dv \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(x/\beta)^j}{j!} e^{-x/\beta} \\ &= \sum_{j=\alpha}^{\infty} \frac{(x/\beta)^j}{j!} e^{-x/\beta} \end{aligned} \tag{4.17}$$

إذا استخدمنا التعويض : $t = \frac{v}{\beta}$ في التكامل (4.16)، فإنه عندما $x \geq 0$ تكون :

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x/\beta} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

وإذا اعتبرنا $y = \frac{x}{\beta}$ ، فإن هذا التكامل يصبح على الصورة :

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{y} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \tag{4.18}$$

وهو يعرف بتكامل جاما غير التام (incomplete gamma integral) ويكتب أحيانا بدون $\Gamma(\alpha)$. ويمكن حساب قيمة هذا التكامل عندما تكون α عددا صحيحا

موجبا باستخدام (4.17) عندما $\beta = 1$ وجداول بواسون إذ أنه في هذه الحالة يكون:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} e^{-y} \frac{y^j}{j!} = 1 - P(T \leq \alpha - 1)$$

حيث $T \sim \wp(y)$.

وأما إذا لم تكن α عددا صحيحا موجبا فتستخدم جداول أخرى مثـل التـي فـي المرجع [1].

(4.4.1) خصائص توزيع جاما للاحتمالات واستخداماته

(1) من أهم خصائص توزيع جاما للاحتمالات خاصية "التوالد" reproductive property : فإذا خضع كـل مـن المتغيـرات العـشوائية المستقلة X_1، ...، X_n لقانون جاما للاحتمالات بحيـث أن $X_i \sim G(\alpha_i, \beta)$ حيث $(i = 1, \ldots, n)$ وإذا كان $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$، فإن Z يخضع لقـانون جامـا بالبارامترين (α, β) حيث $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. وخاصية التوالد هذه تـستخدم ــ ضمن أشياء أخرى ــ في تحديد موقع جاما القبْلي في تحليلات اختبارت بييز Bayes للموثوقية.

(2) يظهر توزيع جاما ــ طبيعيا ــ كتوزيع مجموع مربعات متغيرات عـشوائية مستقلة ــ يخضع كل منها للتوزيع المعتدل المعياري (يسمى توزيع χ^2 وهــو حالة خاصة من توزيع جاما كما سيأتي ذكره).

(3) يستخدم توزيع جاما في تقريب توزيعات "الصيغ التربيعية" quadratic forms لمتغيرات تخضع للتوزيع المعتدل ذي المتغيرات المتعددة.

(4) يعطي توزيع جاما تمثيلات مفيدة في حالات فيزيائية متعددة، مثل اختبـارات

الحياة، والعدادات العشوائية، والعمليات العشوائية، والحالات الجوية وسقوط الأمطار والثلوج، وفي مجالات الغوص في البحار، وبيانات الدخول الفردية. كما استخدم توزيع جاما في "البيئة" (Ecology)، ودراسة بعض المجتمعات الحيوانية وما يتعلق باتزان توزيع هجرتها.

(5) توجد جداول لحسابات $\Gamma(x), \ln\Gamma(x), \Psi(x), \Psi'(x)$، مثل الجداول التي في أبراموفيتز وستيجن Abramowitz and Stegun (1970) المرجع [1]، حيث تسمى الدالة $\Psi(x)$ دالة جاما الثنائية digamma function وتعريفها كالآتي:

$$\Psi(x) = \frac{d}{d\,x}\left[\ln\left(\Gamma(x)\right)\right],\ \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x\,-1}\,e^{-t}\,d\,t,\ x = 1\,(0.005)\,2.$$

حيث يحسب :

$$\Gamma(x,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x} t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,d\,t,$$

لقيم α ، x المختلفة.

(6) إذا كان $Y \sim Unif(0, 1)$، وكان $Z = -\ln Y$ فإن $Z \sim Exp\ (1)$.

(7) هناك توزيعات ناتجة عن قطع توزيع جاما (truncation) ، وتركيب توزيع جاما مع توزيعات أخرى (compounding)، وتحويلات على متغيرات تخضع لتوزيع جاما، والخلائط المحدودة، ومجموع، وحاصل ضرب متغيرات خاضعة لتوزيع جاما.

حالات خاصة وهامة من قانون جاما للاحتمالات

(4.4.2) القانون الأسي للاحتمالات Exponential Probability Law

ونحصل عليه بوضع $\alpha = 1$ في قانون جاما بالبارامترين (α, β)، ونكتب $X \sim Exp(\beta)$. أي أن : $X \sim G(\alpha = 1, \beta) \Leftrightarrow X \sim Exp\,(\beta)$، فتكون الكثافة الاحتمالية للقانون الأسي بالبارامتر β هي :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, & x>0 \ , (\beta>0)\\ 0 & , e.w.\end{cases} \tag{4.19}$$

وأما الصيغة المقابلة لصيغة جاما بالبارمترين (α,γ) في (4.14)، فإنه بأخذ $\alpha=1$ ، يصبح $X\sim Exp(\gamma)$ مكافئاً $X\sim G(\alpha=1,\gamma)$، وتصبح الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة :

$$f(x)=\begin{cases}\gamma e^{-\gamma x}, x>0 & ,(\gamma>0) ,\\ 0 & ,e.w.\end{cases} \tag{4.20}$$

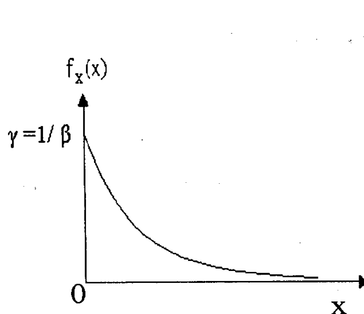
ويمكن إدخال بارامتر موقع δ مثلا لتصبح (4.19)، (4.20) على الصورتين :

$$f(x)=\gamma\, e^{-\gamma(x-\delta)} \ , x>\delta \quad \text{أو} \quad f(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\left(\frac{x-\delta}{\beta}\right)}, x>\delta$$

كما يمكن أخذ $\beta=1$ في (4.19) أو $\gamma=1$ في (4.20) لنحصل على الكثافة الأسية المعيارية :

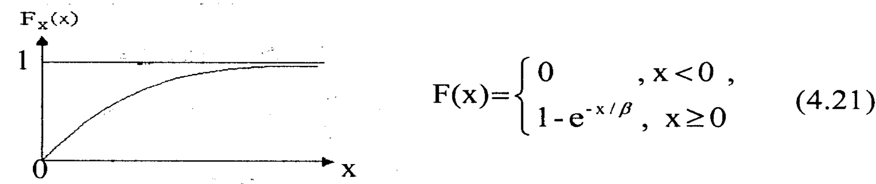
$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & , x>0,\\ 0 & , e.w.\end{cases}$$

ويكون منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الأسي تناقصيا باطراد على طول الفترة $(0,\infty)$.



دالة التوزيع الأسي المقابلة للكثافة الاحتمالية (4.19) تأخذ الصورة :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$
$$=\int_{0}^{x}\frac{1}{\beta}\,e^{-u/\beta}\,du$$



$$F(x)=\begin{cases} 0 & , x<0 , \\ 1-e^{-x/\beta} , & x\geq 0 \end{cases} \qquad (4.21)$$

ويأخذ منحنى دالة التوزيع (4.21) الصورة الممثلة بالشكل.

بعض استخدامات القانون الأسي للاحتمالات وعلاقته بتوزيعات أخرى

يستخدم التوزيع الأسي للاحتمالات في أغــراض متعــددة فـــي مجـــالات الإحصاء المختلفة، ولعل مجال اختبارات الحياة يكون أكثر استخداماً للتوزيع الأسي للاحتمالات وذلك باعتبار "الأعمار" متغيرات عشوائية تخــضع للتوزيـــع الأســـي للاحتمالات حيث السهولة النسبية في الاستعمال، وأحياناً ما لا يكون التمثيل مناسباً، فتستخدم توزيعات أخرى غير التوزيع الأسي للاحتمالات.

وإنتاج حلول تقريبية لتوزيعات صعبة يعتبر من التطبيقات للتوزيع الأسي. ويستخدم القانون الأسي للاحتمالات كتوزيع لزمن الانتظار بين حدثين من الأحداث التي تخضع لقانون بواسون للاحتمالات.

إذا كان $Y \sim Exp(\gamma)$ بكثافة احتمالية (4.20) وكان $Y=X^c$، فإن X يخضع لقانون وايبل Weibull بالبارامترين (γ, c)ذي الكثافة الاحتمالية (ســيأتي الحديث عنه) :

$$f(x)=\begin{cases} \gamma c x^{c-1} e^{-\gamma x^c} , x>0 & ,(c,\gamma>0) , \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

إذا كان $Y \sim Exp(\gamma)$ بكثافة احتمالية (4.20) وكان $Y=e^{-X}$ فإن X يخضع لتوزيع القيمة المتطرفة بالبارامتر γ ذي الكثافة الاحتمالية :

$$f(x)=\gamma e^{-x} e^{-\gamma e^{-x}} \quad , -\infty<x<\infty \quad , (\gamma>0).$$

(4.4.3) قانون $\chi^2(k)$ للاحتمالات

ونحصل عليه بوضع $\alpha = \frac{k}{2}$، $\beta = 2$ في قانون جاما (الصيغة 4.13) أو $\alpha = \frac{k}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$ (الصيغة 4.14)، ونكتب $X \sim \chi^2(k)$.

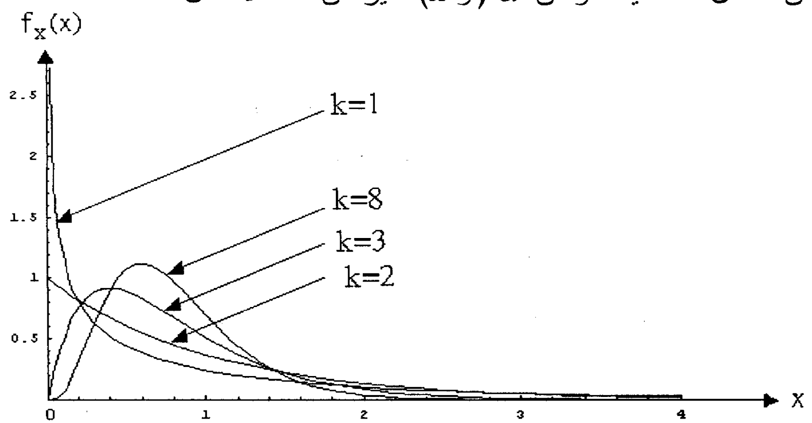
أي أن $X \sim \chi^2(k) \Leftrightarrow X \sim G\left(\alpha = \frac{k}{2}, \beta = 2\right)$ أو $X \sim G\left(\alpha = \frac{k}{2}, \gamma = \frac{1}{2}\right)$

وفي الحالتين تكون الكثافة الاحتمالية لقانون $\chi^2(k)$ للاحتمالات على الصورة :

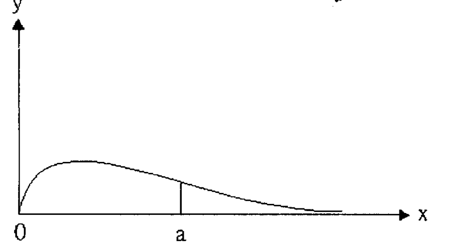
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , e.w. \end{cases} \tag{4.22}$$

حيث k عدد صحيح موجب يسمى "درجات الحرية".

نلاحظ في هذه الكثافة أنها تعتمد على بارامتر واحد هو درجات الحرية k (وهو يناظر بارامتر الشكل α في قانون جاما). لذلك فإن منحنيات الكثافة الاحتمالية لقانون $\chi^2(k)$ لا تختلف كثيراً عن منحنيات قانون جاما $G(\alpha, \beta)$ إذ أن β لا يغير من أشكال المنحنيات ولكن α (أو k) تغير من هذه الأشكال.



والمنحنيات الممثلة في الشكل السابق تعبر عن كثافة $\chi^2(k)$ لقيم k المختلفة والحالة $k = 2$ تكافئ الكثافة الأسية بالبارامتر 1. أي أن : $Exp(1) \equiv \chi^2(2)$. كما يمكن إثبات أنه عندما $k \to \infty$ فإن قانون $\chi^2(k)$ يؤول إلى القانون المعتدل N(k, 2k).

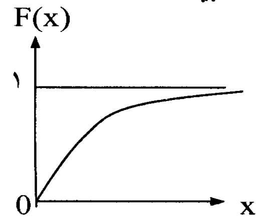


جدول (V) في ملحق (E) يعطي قيم a المقابلة للمساحة التي يحدها الخط الرأسي y = a. أي أنه إذا أعطينا $P[X \le a]$ وعدد درجات الحرية k، فإن الجدول يعطينا قيمة a التي تحد المساحة، وإذا كان $P[X \le b] = 0.025$، فإن b = 4.4 وهكذا.

وعلى وجه العموم، فإن دالة توزيع قانون $\chi^2(k)$ هي :

$$F(x) = P[X \le x] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{x/2} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t}\, dt$$

وهي على صورة تكامل جاما غير التام المعطى بالمعادلة (4.18) عندما $y = \frac{x}{2}$ ، $\alpha = \frac{k}{2}$ ويأخذ منحنى دالة التوزيع الصورة المبينة.



بعض خصائص قانون $\chi^2(k)$ وعلاقته بتوزيعات أخرى

يمكن إثبات أن مجموع مربعات k من المتغيرات العشوائية المستقلة التي يخضع كل منها للقانون المعتدل المعياري، يخضع لقانون $\chi^2(k)$ كذلك فإن مجموع

مربعات k من المتغيرات العشوائية المستقلة التي يخضع كل منها لقانون $N(\mu_j, 1)$ ، $(j = 1, \ldots, k)$، يخضع لقانون $\chi^2(k, \delta)$ اللامركزي حيث $\delta = \sum_{j=1}^{k} \mu_j^2$ هو بارامتر اللامركزية (تناقش التوزيعات اللامركزية في الجزء الثاني من هذا الكتاب).

كما يمكن إثبات أنه إذا كان $X \sim N(0, 1)$، $Y \sim \chi^2(k)$ وكان X، Y مستقلين، $Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/k}}$ ، فإن $Z \sim t(k)$ (الجزء الثاني من الكتاب).

وكذلك فإنه إذا كان $X \sim \chi^2(m)$ ، $Y \sim \chi^2(n)$ مستقلين، $Z = \dfrac{X/m}{Y/n}$ ، فإن $Z \sim F(m, n)$ (الجزء الثاني من الكتاب).

الجذر التربيعي الموجب لمتغير عشوائي يخضع لقانون $\chi^2(k)$ يعرف بمتغير $\chi(k)$ ، أي أنه إذا كان $X \sim \chi(k)$ فإن الكثافة الاحتمالية لهذا القانون هي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(k/2)-1}\,\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{k-1} e^{-x^2/2}, & x > 0, \ (k > 0) \\ 0, & e.w. \end{cases} \tag{4.23}$$

وهو يحتوي ـ كحالات خاصة ـ على التوزيعات الثلاثة الآتية :

(1) نصف المعتدل (عندما $k = 1$) ـ أي المعتدل المقطوع عند الصفر.

(2) رايلي Rayleigh (عندما $k = 2$).

(3) ماكسويل ـ بولتزمان Maxwell-Boltzmann (عندما $k = 3$).

ونلاحظ أن منوال الكثافة الاحتمالية (4.23) لقانون $\chi(k)$ هو الصفر عندما $0 < k \le 1$ ، بينما يكون المنوال هو $\sqrt{k-1}$ عندما $k > 1$.

وتوجد جداول مختلفة لحساب تكامل جاما غير التام والذي يشتمل على تكامل $\chi^2(k)$ أو $\chi(k)$ غير التام.

مثال (4.9) : إذا كان $X \sim G(\alpha = 4, \beta = 3)$، فاحسب $P(X > 6)$.

الحل :
$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - \left[1 - \sum_{j=0}^{3} \frac{2^j}{j!} e^{-2}\right]$$

وذلك باستخدام (4.17). لذلك فإن :
$$P(X > 6) = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right] e^{-2} = 0.857$$

مثال (4.10) : يسجل أحد الرادارات على طريق من الطرق السريعة مخالفة السيارات التي تتجاوز الحد الأقصى للسرعة المسموح بها. فإذا خضع عدد السيارات المسجلة على الرادار لقانون بواسون للاحتمالات بمعدل وصول للسيارات وقدره $\lambda = 8.5$ سيارة في الساعة. ما هو احتمال أن يقل زمن الانتظار بين وصول سيارتين مخالفتين عن ست دقائق ؟

الحل : العلاقة بين البارامتر γ في الصيغة (4.20) للقانون الأسي $Exp(\gamma)$، والبارامتر λ في قانون بواسون هي أن : $\gamma = \lambda$، لذلك فإن : $\gamma = 8.5$.
ونظراً لأن عدد السيارات المخالفة للحد الأقصى للسرعة هو بالساعة، فإن ست دقائق تمثل 0.1 من الساعة، ويكون المطلوب هو حساب $P[X < 0.1]$ حيث يخضع X للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر $\gamma = 8.5$.

$$P[X < 0.1] = \int_0^{0.1} 8.5\, e^{-8.5x}\, dx = -e^{-8.5x}\Big|_0^{0.1} = 1 - e^{-0.85}$$
$$= 0.573$$

مثال (4.11): يخضع كل من المتغيرات العشوائية المستقلة X_1، ...، X_k للقانون المعياري المعتدل $N(0, 1)$.

(أ) إذا كان $Y_i = X_i^2$ فاثبت أن $Y_i \sim \chi^2(1)$ لجميع قيم $i = 1, \ldots, k$.

(ب) يختص قانون χ^2 بخاصية التوالد (لأنه حالة خاصة من قانون جاما)، لـــذلك فإنه يمكن إثبات أنه إذا كان : $Z = Y_1 + ... + Y_k$ فإن $Z \sim \chi^2(k)$.

(لاحظ أن $Y_i \sim \chi^2(1)$ $(i = 1, \ldots, k)$ من (أ)، Y_1 ،...، Y_k مستقلة).

(i) إذا كانت $k = 9$ ، فاحسب $P[Z < 4.17]$.

(ii) أوجد قيمة a إذا علمت أن $P[Z > a]$، $k = 25$.

(iii) أوجد قيمتي a، b بحيث أن

$P[a < Z < b] = 0.9$، $P[Z < a] = P[Z > b] = 0.05$، $k = 20$

الحل : (أ)

$$X_i \sim N(0,1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$\Rightarrow F_{Y_i}(y) = P[\, Y_i \le y \,] = P\left[X_i^2 \le y \right] = P\left[\, | X_i | \le \sqrt{y} \,\right]$$

$$= P\left[\, -\sqrt{y} \le X_i \le \sqrt{y} \,\right] = F_{X_i}\left(\sqrt{y}\right) - F_{X_i}\left(-\sqrt{y}\right) .$$

$$\Rightarrow f_{y_i}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_{x_i}(\sqrt{y}) + f_{x_i}(\sqrt{y}) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} , \; y > 0 .$$

$$\Rightarrow Y_i \sim \chi^2(1)$$

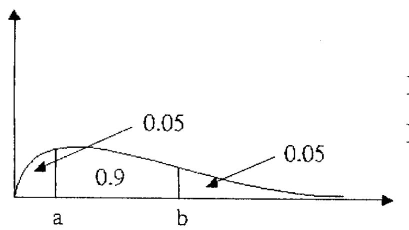
(ب) (i) نظرا لأنه عندما $k = 9$ يكون $Z \sim \chi^2(9)$ ، فإنه باستخدام جدول (V) عندما $k = 9$ يكون : $P[Z < 4.17] = 0.1$.

(ii) عندما $k = 25$، فإن $Z \sim \chi^2(25)$ ، ويؤدي $P[Z > a] = 0.05$ إلى أن: $P[Z \le a] = 0.95$ وباستخدام جدول (V) عندما $k = 25$، فإن $a = 37.7$.

(iii) عندما $k = 20$، فإن $Z \sim \chi^2(20)$ ، وباستخدام جدول (V) عندما $k = 20$ فإن :

$$P[\, Z < a \,] = 0.05 \;\Rightarrow\; a = 10.9 ,$$

$$P[\, Z > b \,] = 0.05 \;\Rightarrow\; b = 31.4$$



فتكون الفترة : $10.9 < Z < 31.4$ محققة

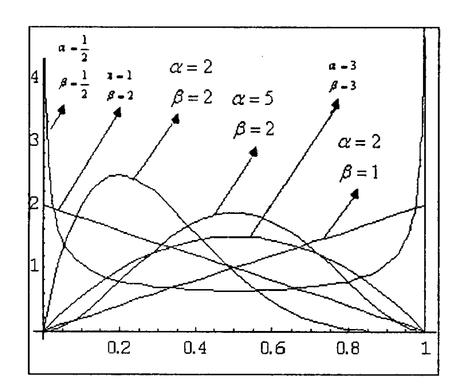
للاحتمال : $P[\,10.9 < Z < 31.4] = 0.9$

(4.5) قانون بيتا للاحتمالات Beta Probability Law

نقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون بيتا للاحتمالات بالبارامترين (α, β) إذا كانت كثافته الاحتمالية على الصورة :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & , 0 < x < 1, (\alpha, \beta > 0), \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases} \qquad (4.24)$$

ويوضح الشكل الصور المختلفة التي يأخذها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية بتغير قيم (α, β).



منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية لقانون بيتا بالبارامترين (α, β)

ويمكن إثبات أن $f_X(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية وذلك بملاحظة أنها غير سالبة لجميع قيم x، وكذلك فإنه باستخدام الصيغتين (B.12)، (B.13) في ملحق (B)، أي باستخدام أن :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

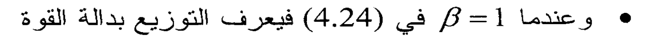
فإن : $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

دالة توزيع قانون بيتا ــ وتسمى أيضاً دالة بيتا غير التامة (Incomplete beta function) هي

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , \; x \le 0 \;, \\ \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^x y^{\alpha-1} \;(1-y)^{\beta-1}\, dy & , \; 0<x<1 \;, \\ 1 & , \; x \ge 1 \,. \end{cases}$$

وتأخذ الصورة المبينة بالشكل.

وتوجد جداول (مثل أبراموفيتز وســتيجن Abramowitz and Stegun (1970) المرجع [1]) لحساب دالة بيتا غير التامة، لقيم x المختلفة.



- وعندما $\beta=1$ في (4.24) فيعرف التوزيع بدالة القوة (power function distribution) وتكون الكثافة في هذه الحالة على الصورة :

$$f_X(x)=\begin{cases} \alpha\, x^{\alpha-1} & , \; 0<x<1 \;, (\alpha>0) \\ 0 & , \; e.w. \end{cases} \qquad (4.25)$$

- عندما $\alpha=1 , \beta=1$ في (4.24) أو $\alpha=1$ في (4.25)، فإن التوزيع في هذه الحالة يصبح التوزيع الاحتمالي المنتظم على الفترة (1 ,0) حيث تأخذ $f_X(x)$ الصورة :

$$f_X(x)=\begin{cases} 1 & , \; 0<x<1 \\ 0 & , \; e.w. \end{cases}$$

- وعندما $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ في (4.24)، فإن التوزيع يعرف بتوزيع الجيب العكـــسي arc-sine distribution، ذلك لأنه في هذه الحالة يكون :

$$P[X \le x]=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right) & , \; 0<x<1 \,, \\ 0 & , e.w. \end{cases} \qquad (4.26)$$

- **توزيع بيتا من النوع الثاني وعلاقته بتوزيع بيتا من النوع الأول**

لسنوات عديدة، استخدم توزيع بيتا كتوزيع قبْلي لنسب ذات الحدين في التحليل البيزي حيث اعتبر توزيع بيتا توزيع قبْلي "طبيعي" لبارامتر ذات الحدين p. وكذلك استخدم توزيع بيتا في متغيرات علوم المياه "hydrology"، وفي نسب خلائط الغازات، والإشعاعات الشمسية، والشوشرة وقوة الإشارات الرادارية، وفي الأنسيابات المرورية، وامتصاص الغازات وغيرها من التطبيقات.

(4.6) قانون وايبل للاحتمالات Weibull Probability Law

وهو نسبة إلى عالم الفيزياء السويدي والودي وايبل Waloddi Weibull الذي اقترحه في عام (1951). سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون وايبل للاحتمالات بالبارامترين α ،β ونكتب $X \sim W(\alpha, \beta)$ ، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي :

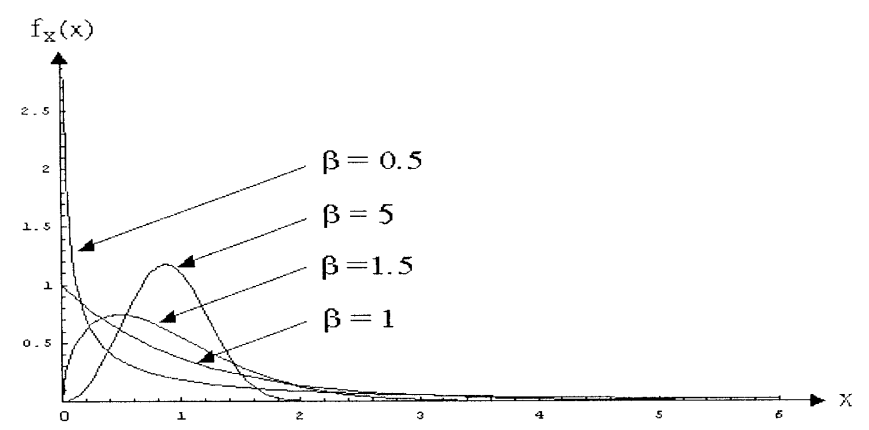
$$f_X(x)=\begin{cases} \alpha\,\beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\alpha x^{\beta}} & , x>0\ ,(\alpha,\beta>0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.27)$$

وتكتب دالة الكثافة في صيغ أخرى بكتابة البارامتر α على الصورة $\alpha=\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\beta}$ ، مثلا، لتصبح دالة الكثافة (4.27) على الصورة :

$$f_X(x)=\begin{cases} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\gamma)^{\beta}} & , x>0\ ,(\alpha\ ,\gamma>0\ ) \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.28)$$

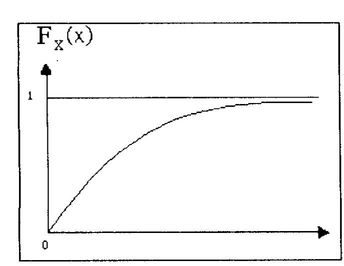
البارامتر α (أو γ) هو بارامتر مقياس بينما β هو بارامتر شكل، ويمكن إدخال بارامتر موقع على أي من الصيغتين (4.27)، (4.28).

وتأخذ دالة الكثافة الاحتمالية (4.28) الصورة المبينة في الشكل حيث يتناقص منحنى الدالة تناقصا مطردا لجميع قيم $0<\beta\le 1$ ، أيا كانت قيمة α (أخذنا قيمة



$\alpha = 1$ في جميع الحالات التي تم رسمها). أما إذا كانت$1 < \beta$ ، فـــإن منحنـــى الدالة يتزايد على الفترة $(0, x^*)$ حيث $x^* = \left(\dfrac{\beta - 1}{\alpha \beta}\right)^{1/\beta}$ هو منوال الدالـــة، ثـــم يتناقص المنحنى إلى الصفر على الفترة (x^*, ∞).

دالة التوزيع المقابلة للكثافة الاحتمالية (4.28) هي :



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^\beta} & , x > 0, \\ 0 & , e.w. \end{cases} \quad (4.29)$$

وتأخذ صورة منحنى دالة التوزيع الشكل المبين.

ومن الحالات الخاصة لتوزيع وايبـــل (α, β) :

التوزيع الأسي $W(\alpha, \beta = 1) = Exp(\alpha)$ ،

توزيـــع رايلـــي $W(\alpha, \beta = 2) = Ray(\alpha)$ ،
وكثافته هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\alpha \, x \, e^{-\alpha x^2} & , x > 0 \ , (\alpha > 0), \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

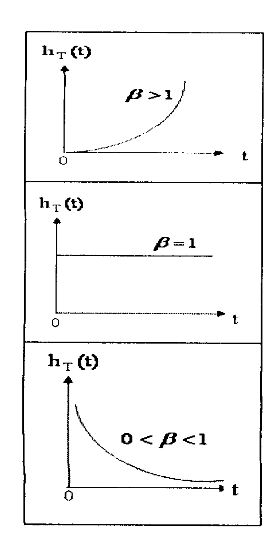
قمنا في المسألة (18) من تمارين (3) بتعريف معدل تعطل جهاز عن العمل في الزمن t لتوزيعات المتغيرات العشوائية المتقطعة. سنكتب تعريفاً لمعدل التعطل لتوزيعات المتغيرات العشوائية المتصلة كالآتي :

تعريف (4.1) : إذا خضع متغير عشوائي T لقانون احتمالي كثافته $f_T(t)$ وتوزيعه $F_T(t)$، فإن الدالة $\overline{F}_T(t) = 1 - F_T(t)$ تسمى دالة الموثوقية (reliability function)، كما تسمى الدالة الناتجة عن خارج قسمة دالة الكثافة $f_T(t)$ ودالة الموثوقية $\overline{F}_T(t)$، دالة معدل المخاطرة (hazard rate function)، ونرمز لها عادة بالرمز $h_T(t)$ فتكون دالة المخاطرة هي :

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{\overline{F}_T(t)} \ , \ t > 0 \qquad (4.30)$$

دالة معدل المخاطرة لقانون وايبل للاحتمالات (باستخدام (4.29)، (4.30)) هي :

$$h_T(t) = \alpha \, \beta \, t^{\beta - 1} \ , t > 0 , (\alpha , \beta > 0) \ . \qquad (4.31)$$



لذلك فإن منحنى دالة المخاطرة $h_T(t)$ يكون :

تزايديا على طول الفترة $(0, \infty)$ إذا كانت $\beta > 1$ ،

ثابتاً على طول الفترة $(0, \infty)$ إذا كانت $\beta = 1$ ،

تناقصياً على طول الفترة $(0, \infty)$ إذا كانت $0 < \beta < 1$.

هذه الحقيقة جعلت لقانون وايبل للاحتمالات فائدة كبيرة كنموذج اختبار حياة. وقد استخدم قانون وايبل كنموذج لسرعة الرياح على المحيطات، ومولدات التربينات الهوائية، كما استخدم في تحليل سقوط المطر وبيانات الفيضانات.

كما استخدم توزيع وايبل في مجالات الصحة مثل تصميم التجارب السرطانية، وتحليل العلاقة بين ضغط الدم والكلسترول بالتدخين، فضلاً عن أمراض القلب، وسرطان الرئة، كما استخدم تحليل بييز (Bayes) لمنحنيات الحياة لمرض السرطان بعد العلاج، وكذا تحليل شبيهات البارامترية (semi parametric) لمعدلات المخاطرة للأورام في تجارب الحياة.

وفضلاً عن هذه التطبيقات الصحية، فقد تم استخدام توزيع وايبل في التدريج الميكروسكوبي للأوراق، وفي علم الموائع المتحركة، والأرصاد الجوية، والبيانات الصيدلية، وعلوم الوراثة، وفي صناعة الأخشاب، وتأثير الأوزان على المحاصيل الزراعية، وغير ذلك من التطبيقات العديدة في المجالات المختلفة. أنظر جونسون، كوتز، وبلاكريشنان Johnson, Kotz and Balakrishnan (1995) المرجع [13].

وعندما $Y = -\ln\left(\alpha\, x^{\beta}\right)$ حيث $X \sim W(\alpha, \beta)$، فإن

$f_Y(y) = e^{-y}\, e^{-e^{-y}}, \; -\infty < y < \infty$ وهي إحدى صيغ توزيعات القيمة المتطرفة (extreme value).

وإذا اعتبرنا في الصيغة (4.30) لقانون وايبل أن β ثابتة، وأن α متغير عشوائي يخضع لقانون جاما بالبارامترين (γ, δ) ذي الكثافة :

$$g(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\delta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \alpha^{\gamma-1} e^{-\delta\alpha}, & \alpha > 0, (\gamma, \delta > 0) \\ 0 & , \text{o.w.} \end{cases} \qquad (4.32)$$

فإن توزيع وايبل المركب (أو بير من النوع الثاني عشر ذي البارامترات الثلاثة) (three-parameter Burr type XII) يتركب من توزيعي وايبل وجاما كالآتي :

$$f_X^{*}(x) = \int_0^{\infty} f_X(x \mid \alpha)\, g(\alpha)\, d\alpha \quad ,$$

حيث تعطي $g(\alpha)$ كما في (4.32)، $f_X(x|\alpha)$ كما في (4.27). لذلك فإن :

$$f_X^*(x) = \int_0^\infty \alpha\,\beta\,x^{\beta-1}\,e^{-\alpha x^\beta}\,\frac{\delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\,\alpha^{\gamma-1}\,e^{-\delta\alpha}\,d\alpha$$

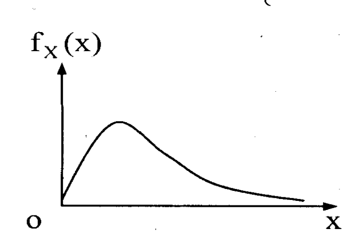
$$= \frac{\delta^\gamma \beta\, x^{\beta-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \alpha^\gamma\, e^{-(\delta + x^\beta)\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{\delta^\gamma \beta\, x^{\beta-1}}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\delta + x^\beta)^{\gamma+1}}$$

$$= \frac{\gamma\beta}{\delta}\,x^{\beta-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}x^\beta\right)^{-\gamma-1} \quad , x > 0 \ , (\beta, \gamma, \delta > 0)$$

التوزيع ذي الكثافة الاحتمالية $f_X^*(x)$ حيث :

$$f_X^*(x) = \begin{cases} \frac{\gamma\beta}{\delta}\,x^{\beta-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}x^\beta\right)^{-\gamma-1} & , x > 0, (\beta, \gamma, \delta > 0) \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.33)$$



الذي يطلق عليه توزيع وايبل المركـــب (أو المختلط) أو توزيع بير من النوع الثاني عشر ذي البارامترات الثلاثة لـــه أهميـــة كبـــرى وتطبيقات متعـــددة فـــي اختبــارات الحيـــاة وغيرها من المجالات الإحصائية.

(4.7) قوانين باريتو للاحتمالات Pareto Probability Laws

نسبة إلى أستاذ الاقتصاد السويسري (إيطالي المولـــد) فيلفريـــدو بـــاريتو Vilfredo Pareto الذي عاش في الفترة (1923 - 1848)، وكان قد اقترح توزيع دخل مجتمع كالآتي :

$$N = A\,x^{-\alpha}$$

حيث تمثل N عدد الأشخاص ذوي الدخول التي لا تقل عن x، وأما A، α فهما

ثابتان، يعرف الأخير منهما بثابت باريتو.

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون باريتو من النوع الأول للاحتمالات ونكتب $X \sim Par\ I(\alpha, \beta)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\, \beta^{\alpha}\, x^{-(\alpha+1)}, & x \geq \beta\ , (\alpha, \beta > 0), \\ 0 & , \ e.w. \end{cases} \tag{4.34}$$

وهي تناقصية على الفترة $[\beta, \infty)$.

إذا كان $X \sim Par\ I(\alpha, \beta)$ فإن دالة التوزيع التراكمية تأخذ الصورة :

$f_X(x)$; α/β ; 0 ; β ; x

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < \beta \\ 1 - \left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha} & , x \geq \beta\ , (\alpha, \beta > 0). \end{cases} \tag{4.35}$$

ولقد استخدم توزيع باريتو من النوع الأول للاحتمالات في الاقتصاد، وأحجام مجتمعات المدن، ووجود المصادر الطبيعية، وتأرجح أسعار السندات، وأحجام المؤسسات الصناعية والزراعية والتجارية، والدخول الشخصية، ودوائر الاتصالات الهندسية، كما استخدم هذا التوزيع كنموذج من نماذج اختبارات الحياة.

ولقد أدخلت تعديلات مختلفة على توزيع باريتو من النوع الأول لتمثيل الدخول تمثيلاً أفضل، كما أجريت على متغيره X تحويلات أدت إلى توزيعات أخرى، ودرست نهايات بعض هذه التوزيعات، وعرف توزيع باريتو المعمم Generalized Pareto Distribution على أنه القانون ذو التوزيع :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\beta + \gamma}{x + \gamma}\right)^{a} e^{-\delta (x - \beta)}, & x \geq \beta, (\delta > 0). \\ 0 & , \ x < \beta\ . \end{cases}$$

وهناك ثلاثة أنواع أخرى لقانون باريتو للاحتمالات نذكرها باختصار على النحـــو التالي :

قانون باريتو من النوع الثاني :

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون باريتو من النوع الثاني للاحتمالات، ونكتب $X \sim \text{Par II}(\alpha, \beta)$ ، إذا كانت كثافته الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 + \dfrac{x}{\beta}\right)^{-\alpha - 1} & , x > 0 \ , (\alpha, \beta > 0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.36)$$

ويطلق عليه أيضاً قانون لوماكس (Lomax) للاحتمالات وهو كذلك قانون بيرسون من النوع السادس (Person type VI) [أنظر المســألة (1) فـــي تمـــارين (4)] وتكون دالة توزيع هذا القانون على الصورة :

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad , x > 0 \ .$$

قانون باريتو من النوع الثالث :

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون باريتو من النوع الثالث للاحتمالات، ونكتب $X \sim \text{Par III}(\alpha, \beta, \gamma)$ ، إذا كانت كثافته الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{\alpha}{\beta} + \left(1 + \dfrac{x}{\beta}\right)\right] e^{-\gamma x} \left(1 + \dfrac{x}{\beta}\right)^{-\alpha - 1} & , x > 0, (\alpha, \beta, \gamma > 0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \qquad (4.37)$$

وتكون دالة توزيع هذا القانون على الصورة :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\gamma x} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad , x > 0 \ .$$

قانون باريتو من النوع الرابع :

سنقول إن المتغير العشوائي X يخضع لقانون باريتو من النوع الرابع للاحتمالات، ونكتب $X \sim \text{Par IV}(\mu, \sigma, \alpha, \beta)$ إذا كانت كثافته الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta\sigma}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\left[1+\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{-\alpha-1} & , x > \mu, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases} \quad (4.38)$$

حيث $\alpha, \beta, \sigma > 0$

وتكون دالة توزيع هذا القانون على الصورة :

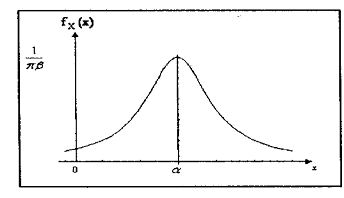
$$F_X(x) = 1 - \left[1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{-\alpha} \quad , x > \mu \ .$$

وللتفصيل، أنظر إلى المرجع [13].

(4.8) قانون كوشي للاحتمالات Cauchy Probability Law

يخضع المتغير العشوائي X لقانـــون كوشي للاحتمالات بالبارامترين α ، β إذا كانت دالة الكثافة للمتغير العشوائي X هي :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)^2\right]} \ , -\infty < x < \infty \quad (4.39)$$

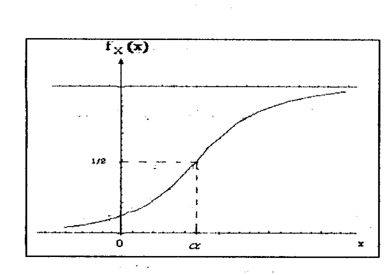


حيث α عدد حقيقي، β عدد حقيقي موجب.

ونلاحظ أن منحنى دالة الكثافة $f_X(x)$ يكون متماثلا حـــول المـــستقيم $x = \alpha$، وتؤول $f_X(x)$ إلى الصفر عندما تؤول x إلى $\pm\infty$.

$\alpha = x$ هي وسيط القانون ومنواله، ولا توجد لهذا القانون عزوم أو دالة توليد عزوم (أنظر الباب السادس).

دالة التوزيع المقابلة للكثافة الاحتمالية (4.39) هي :

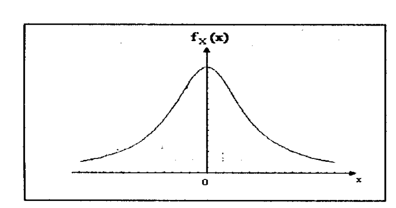


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{\pi \beta \left[1 + \left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad (4.40)$$

ويمثل الشكل منحنى دالة التوزيع $F_X(x)$.

البارامتر α هو بارامتر موقع بينما البارامتر β هو بارامتر قياس، وإذا استخدمنا التحويل : $Z = \frac{X-\alpha}{\beta}$ فإن الكثافة الاحتمالية (4.40) تتحول إلى الكثافة "المعيارية" لقانون كوشي للاحتمالات بالبارامترين $\alpha = 0$، $\beta = 1$ ونكتب أحياناً $X \sim C(\alpha, \beta)$، $Z \sim C(0,1)$ ، للتعبير عن أن X يخضع لقانون كوشي بالبارامترين (α , β) ذي الكثافة الاحتمالية (4.39)، Z يخضع لقانون كوشي بالبارمترين (0, 1) ذي الكثافة المعيارية :



$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi \; [1 + z^2]} \quad , -\infty < z < \infty .$$

ودالة التوزيع المقابلة :

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(z) \, , -\infty < z < \infty .$$

إذا كان $X \sim C(\alpha, \beta)$، فإن $Y = A + B\,X$

يخضع أيضاً لقانون كوشي بالبارامترين

$A + B\alpha$ ، $|B|\beta$ ، أي أن :

$$Y \sim C(A + B\alpha, |B|\beta)$$

ملحوظة : قانون كوشي للاحتمالات هو نفسه قانون t للاحتمالات بدرجة $(k = 1)$ من درجات الحرية.

(4.9) قانون t للاحتمالات t Probability Law

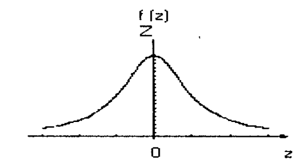
وهو معروف بتوزيع t للطالب (Student's t distribution) حيث نشره تحت اسم "طالب" البريطاني وليم جوست William Gosset في عام 1908. وأصبحت له تطبيقات عديدة في الإحصاء، ولعل شهرته تحت اسم توزيع t للطالب، أكثر من شهرة صاحبه، وربما يجهل الكثيرون اسم صاحب هذا التوزيع.

سنثبت في الجزء الثاني من الكتاب أنه إذا كان $X \sim N(0, 1)$، $Y \sim \chi^2(k)$ وكان X، Y مستقلين، وإذا كان $Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/k}}$، فإن Z يخضع لقانون t للاحتمالات بـ k من درجات الحرية، ونكتب $Z \sim t(k)$، وكثافته الاحتمالية هي :

$$f_Z(z) = C\left(1 + \frac{z^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \quad , -\infty < z < \infty, \qquad (4.41)$$

حيث :

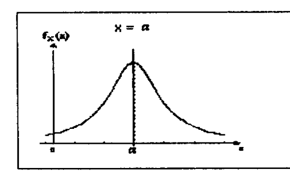
$$C = \frac{1}{\sqrt{k}\, B(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}$$



ويكون منحنى الدالة $f_Z(z)$ متماثلاً حول المحور الرأسي

(أي أن $f_Z(z)$ دالة زوجية) وهذا ما يجعله من القوانين الهامة من الناحية التطبيقية.

ويمكن — من الباب السادس — تحقيق أن متوسط القانون هو الصفر، وتباين القانون هو : $\frac{k}{k-2}$ (حيث $k > 2$). والصيغة العامة لقانون $t(k)$ (بإدخال بارامتر موقع α) هي :



$$f_X(x) = C\left(1 + \frac{(x-\alpha)^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \quad , -\infty < x < \infty$$

وقيمة الثابت C هي نفس قيمته السابقة.

ويكون محور التماثل في هذه الحالة هو $x = \alpha$.

تطبيقات توزيع t :

(1) لعل من أهم استخدامات توزيع t في الإحصاء هو في تكوين "فترات الثقة" و "الاختبارات" التي تتعلق بتوقعات التوزيعات المعتدلة. فمن المعلوم (سنثبت في الجزء الثاني للكتاب) أنه إذا كانت X_1، ...، X_n متغيرات عشوائية مستقلة حيث يخضع كل منها للتوزيع المعتدل $N(\mu, \sigma^2)$ فإن الإحصاء :

$T = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{S}$ يخضع لتوزيع t بدرجات الحرية n - 1، [حيث $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ، $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})$]. ويستخدم الإحصاء T في اختبارات الفروض الإحصائية وتكوين فترات الثقة حول μ .

(2) وقد وجد أن توزيع t يمكن أن يكون نموذجا مناسبا لوصف التغيرات في أسعار الممتلكات مثل السندات. أنظر مثلا المرجع [24] : Taylor and Kingsman.

(3) وأنه يمثل توزيع الصورة المشتقة لمكونات الهواء في منطقة حضارية، كما جاء في المرجع [15] : Lauritzen, Thommesen and Andersen.

(4) واستخدمه ميرزا وبوير في المرجع [17] : Mirza and Boyer (1992) كجزء من نماذج الضجيج لعمق خريطة البيانات، وفي تطوير مقدرات M المناسبة.

(5) واستخدمه أنجرز في المرجع [2] : Angers (1992) كتوزيع قبْلي للقيم المتوقعة للتوزيعات المعتدلة ذات المتغيرات المتعددة.

(6) واستخدمه فيردنيللي وواسرمان في المرجع [26]: Wasserman and Verdinelli كنموذج المجتمع حين مناقشة تحليلات بييز للبيانات الكاذبة (outliers) باستخدام عينات Gibbs.

وتوجد جداول لإيجاد قيمة t التي تحد مساحة تحتها قدرها F(t) تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع t إذا علمت درجة الحرية k.

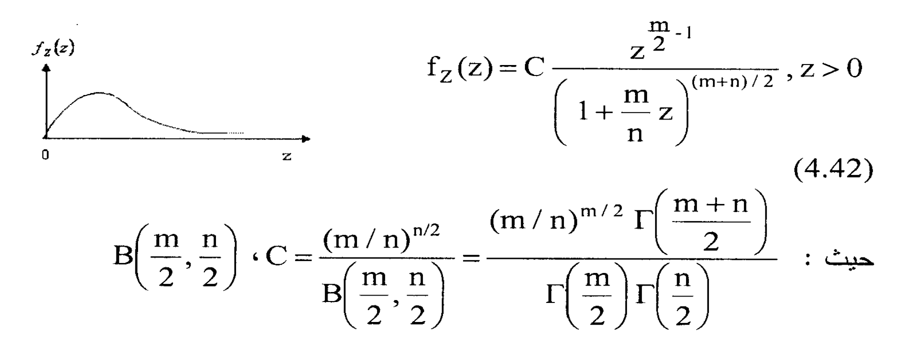
ففي جدول (VI) بملحق E، يمكننا مثلا كتابة قيمة t التي تحد مساحة تحتها قدرها $F(t) = 0.975$ عندما $k = 25$. فتكون t في هذه الحالة هي $t = 2.06$.

كذلك إذا كانت المساحة فوق t هي 0.05 عندما $k = 15$. فإن t في هذه الحالة هي التي تحد مساحة تحت المنحنى قدرها 0.95، فتكون من الجدول $t = 1.753$.

(4.10) قانون F للاحتمالات

سنثبت في الجزء الثاني من الكتاب أنه إذا كان $X \sim \chi^2(m)$ ، $Y \sim \chi^2(n)$ وكان X، Y مستقلين، $Z = \dfrac{X / m}{Y / n}$ ، فإن Z يخضع لقانون F بالبارامترين (m, n)، ونكتب $Z \sim F(m, n)$، حيث m درجات الحرية في البسط، n درجات الحرية في المقام.

ودالة الكثافة الاحتمالية لقانون $F(m, n)$ للاحتمالات تأخذ الصورة :



$$f_Z(z) = C\,\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{(m+n)/2}}\ ,\ z>0 \tag{4.42}$$

حيث : $C = \dfrac{(m/n)^{n/2}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} = \dfrac{(m/n)^{m/2}\,\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ ، $B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$

هي دالة بيتا. ويجب مراعاة ترتيب m، n لأهمية ذلك.

يلعب توزيع F دوراً هاماً في نظرية الإحصاء، ذلك لأنه يطبق على توزيع نسب "مقدرا التباين" المستقلة.

ويمكن إثبات أنه إذا كان : $W = \left(\frac{m}{n}\right)Z$ ، فإن W يخضع للقانون الاحتمالي ذي الكثافة :

$$f_W(w) = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\,\frac{w^{\frac{m}{2}-1}}{(1+w)^{(m+n)/2}}\quad ,\ w>0 \tag{4.43}$$

وهذه هي كثافة توزيع بيرسون من النوع السادس (Pearson type VI) ـــ أنظر المسألة الأولى في تمارين (4) ـــ كما تعرف **بتوزيع بيتا من النوع الثاني**.

تطبيقات توزيع F :

لعل من أهم استخدامات توزيع F هو اختبار الفرض الإحصائي بتساوي تبايني توزيعين معتدلين، وإيجاد فترات الثقة للنسبة بين هذين التباينين.

فإذا كانت X_1 ، ... ، X_m متغيرات عشوائية مستقلة يخضع كل منها للتوزيع المعتدل $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ، فإن : $U = \frac{(m-1) S_1^2}{\sigma_1^2}$ يخضع لتوزيع $\chi^2(m-1)$.

وبالمثل، إذا كانت Y_1 ، ... ، Y_n متغيرات عشوائية مستقلة يخضع كل منها للتوزيع المعتدل $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ، فإن : $V = \frac{(n-1) S_2^2}{\sigma_2^2}$ يخضع لتوزيع $\chi^2(n-1)$.

حيث S_1^2 ، S_2^2 هما تباينا العينتين المعرفان بالآتي :

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_i)^2 \quad ، \quad S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2$$

سنثبت في الجزء الثاني من الكتاب أنه إذا كان $U \sim \chi^2(n-1)$ ، $V \sim \chi^2(n-1)$ وكان U، V مستقلين، فإن $Z = \frac{U/(m-1)}{V/(n-1)}$ يخضع لتوزيع $F(m-1, n-1)$.

بناء على ذلك، فإن : $\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ يخضع لتوزيع $F(m-1, n-1)$ بافتراض أن المجتمعين مستقلان.

ويمكن استخدام هذه الحقيقة في اختبار الفرض الإحصائي بتساوي تبايني المجتمعين، وكذا إيجاد فترة الثقة للنسبة بين هذين التباينين.

كذلك فإن من الاستخدامات المشهورة لتوزيع F هي في الاختبارات المتعلقة بتحليل التباين. كما استخدم توزيع F في تقريب بعض التوزيعات كما هو مفصل في المرجع [12] : Johnson, Kotz and Balakrishnan.

وتوجد جداول لإيجاد قيمة z التي تحد مساحة تحتها قيمتها $F(z) = 1 - \alpha$ أو فوقها بحيث تكون قيمة α عند معرفة درجات الحرية m، n.

فإذا خضع متغير عشوائي Z لتوزيع F بدرجات الحرية $m = 6$، $n = 9$، فإن

قيمة z التي تحد مساحة فوقها قيمتها $\alpha = 0.05$ هي $z = 3.37$،
وكذلك فإن قيمة z التي تحد مساحة فوقها قيمتهـــا $\alpha = 0.025$ عنـــدما $m = 10$،
$n = 15$ هي $z = 3.06$ كما فى جدول (VII).

تمـــارين (4)

(1) نظام بيرسون (Pearson system) للتوزيعات

تؤدي المعادلة التفاضلية الآتية (بالاختيار المناسب للثوابت α، β، γ، δ إلى الحصول على معظم التوزيعات الإحصائية الهامة :

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}[f(x)]=\frac{\delta - x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}.$$

حقق أن هذه المعادلة التفاضلية تعطي :

(i) القانون الأسي عندما : $\alpha=\gamma=\delta=0$ ، $\beta>0$

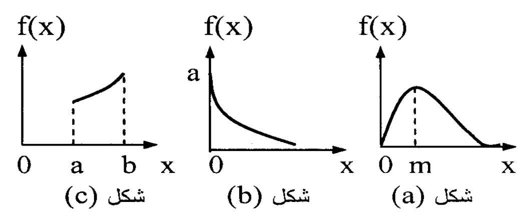
(ii) قانون جاما عندما : $\alpha=\gamma=0$ ، $\delta>\beta>0$

(iii) قانون بيتا عندما : $\alpha=0$ ، $\beta=-\gamma$ ، $\frac{\delta-1}{\beta}<1$ ، $\frac{\delta}{\beta}>-1$

(iv) القانون المعتدل عندما : $\beta=\gamma=0$ ، $\alpha>0$

(2) منوال (mode) الكثافة الاحتمالية

يعرف منوال الكثافة الاحتماليـــة بأنه النقطة التي تأخـــذ عنـــدها الكثافة الاحتمالية نهاية عظمى. النقطة m هي منوال الكثافة



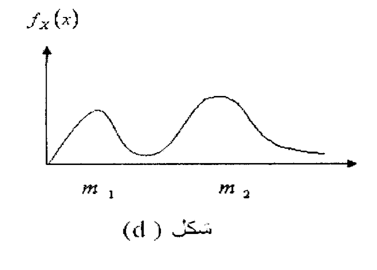
شكل (c) شكل (b) شكل (a)

الاحتمالية في الشكل (a)، ونحصل عليها باشتقاق الدالة ومساواة المشتقة بالــصفر أي أن المنوال m في هذه الحالة هو قيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{d}{dx}[f(x)]=0$.

إذا كانت f(x) مطردة التناقص على الفترة $[0,\infty)$ كمـــا فـــي شـــكل (b)، فـــإن المنـــوال يكون في هذه الحالة $m=0$.

وعمـــوماً إذا كانـــت f(x) مطردة التناقص على الفترة [a, b]، فإن المنوال يكون m = a وأما إذا كانت مطردة التزايد على الفترة [a, b] كما في الـــشكل (c) فـــإن المنوال يكون m = b.

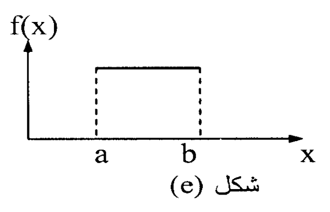
[ملحوظة : إذا كانت m هي النقطة الوحيدة التي تحقق المعادلة $\frac{d}{dx}[f(x)] = o$ فإننا نقول إن f(x) كثافة وحيدة المنوال (unimodal density) ويمكن لهذه المعادلة أن تحققها نقطتان m_1، m_2 (شكل (d))،



شكل (d)

ونقول إن f(x) كثافـــة ثنائيـــة المنـــوال (bimodal density)، وهكذا يمكـــن أن تحقق المعادلة أكثر من نقطتين فنقول إن f(x) هـــي كثافـــة متعـــددة المنـــوالات (multimodal density).

كذلك فإن الكثافة الاحتمالية يمكـــن أن لا يكون لها أي منوال، إذ لا توجد أي نقطة تأخذ عندها الدالة نهاية عظمى مثل الكثافة المبينة في شكل (e)].



شكل (e)

(a) إذا كان $X \sim G(\alpha, \beta)$ حيث :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , x > 0, (\alpha > 0, \beta > 0) \\ 0 & , e. w. \end{cases}$$

فاثبت أن منوال هذه الكثافة هو :

$$m = \begin{cases} 0 & , 0 < \alpha \le 1 , \\ \frac{\alpha - 1}{\beta} & , \alpha > 1. \end{cases} .$$

(b) إثبت أن منوال كثافة بيتا بالبارامترين (α, β) هو : $m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}, \alpha > 1$.

ماذا يحدث عندما $0 < \alpha \leq 1$؟

(c) إثبت أن منوال كثافة وايبل بالبارامترين (α , β) حيث :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta - 1} e^{-a x^{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

هو $m = \left(\frac{\beta - 1}{\alpha}\right), \beta > 1$. ماذا يحدث عندما $0 < \beta \leq 1$ ؟

(d) إثبت أن منوال كثافة القانون المعتدل $N(\mu , \sigma^2)$ يكون $m = \mu$.

(3) قيم التقسيمات الجزئية (quantiles)

تسمى x_τ التي تحقق المتباينتين :

$$P[X \leq x_\tau] \geq \tau \quad , P[X \geq x_\tau] \geq 1 - \tau \quad , (0 < \tau < 1)$$

قيمة التقسيم الجزئي من رتبة τ .

ويمكن كتابة المتباينتين السابقتين كمتباينة واحدة على الصورة :

$$\tau \leq F(x_\tau) \leq \tau + P(X = x_\tau)$$

إذا كان : $P[X = x] = 0$ لجميع قيم x، أي إذا كان المتغير العشوائي X متصلاً، فإن قيمة التقسيم الجزئي من رتبة τ تكون العدد x_τ الذي يحقق المعادلة :

$$F(x_\tau) = \tau$$

وإذا كانت هناك أكثر من قيمة تحقق المتباينتين السابقتين (أو المتباينة المزدوجة)، فإن كلا من هذه القيم يسمى قيمة التقسيم الجزئي من رتبة τ .

حالات خاصة :

(i) الرُبيع الأول والوسيط والرُبيع الثالث.

الرُبيع الأول (first quartile) $x_{1/4}$: يحقق المتباينتين السابقتين، أي يحقق

$$P[X \le x_{1/4}] \ge \frac{1}{4}, P[X \ge x_{1/4}] \ge \frac{1}{4}$$

أو يحقق المتباينة المزدوجة : $\frac{1}{4} \le F(x_{1/4}) \le \frac{1}{4} + P[X = x_{1/4}]$.

الوسيط (median) $x_{1/2}$: (وهو الربيع الثاني) يحقق المتباينتين

$$P[X \le x_{1/2}] \ge \frac{1}{2}, P[X \ge x_{1/2}] \ge \frac{1}{2}$$

أو يحقق المتباينة المزدوجة : $\frac{1}{2} \le F(x_{1/2}) \le \frac{1}{2} + P[X = x_{1/2}]$.

الرُّبيع الثالث (third quartile) $x_{3/4}$: ويحقق المتباينتين :

$$P[X \le x_{3/4}] \ge \frac{3}{4}, P[X \ge x_{3/4}] \ge \frac{3}{4}$$

أو يحقق المتباينة المزدوجة : $\frac{3}{4} \le F(x_{3/4}) \le \frac{3}{4} + P[X = x_{3/4}]$.

إذا كان المتغير العشوائي X متغير عشوائياً متصلاً، فإن :

$x_{1/4}$ هو الربيع الأول إذا حقق المعادلة : $F(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$

$x_{1/2}$ هو الوسيط إذا حقق المعادلة : $F(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$

$x_{3/4}$ هو الربيع الثالث إذا حقق المعادلة : $F(x_{3/4}) = \frac{3}{4}$

وفي جميع الحالات يسمى $R = \frac{1}{2}(x_{3/4} - x_{1/4})$ نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي) (semi-interquartile range).

إذا كان : $X \sim N(3, 4)$ فاثبت أن :

$$x_{1/4} = 1.69 \;, x_{1/2} = 3 \;, x_{3/4} = 4.31 \,, R = 1.31 .$$

(4) سرعة جزيء في غاز منتظم عند الاتزان هي متغير عشوائي كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x)=\begin{cases} A\,x^2\, e^{-b x^2} & , x \ge 0 \ , \\ o & , e.w. \end{cases}$$

حيث $b=\dfrac{m}{2\,k\,T}$ ،

k، T، m تمثل على الترتيب : ثابت بولتزمان، ودرجة الحرارة المطلقـة وكتلـة الجزيء. أوجد A بدلالة b.

(5) بكتابة $I_\lambda(x)=\int_\lambda^\infty t^x\, e^{-\lambda}\, d\,t$ ، حيث x صحيح غير سالب، إثبت أن :

$$I_\lambda(x)=\lambda^x\, e^{-\lambda}+x\, I_\lambda\,(x-1)\quad , x=1, 2, \ldots$$

ومن ذلك أن :

$$\sum_{y=0}^{x} e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^x}{y\,!} = x\,!\int_\lambda^\infty t^x\, e^{-\lambda}\, d\,t$$

[هذه العلاقـة بين تكامل جاما غير التام (incomplete gamma integral) وكتلة بواسون المقطوعة (truncated Poisson function) تـستخدم فـي الحسابات].

(6) إذا خضع المتغير العشوائي X للقانون الاحتمالي المنتظم المتصل على الفترة (a, b)، فاثبـت أن احتمـال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمـة تقـل عن a + p(b-a) هي p.

(7) إذا خضع المتغير العشوائي X لقانون دالة توزيعه هـي $F_X(.)$ ، وإذا كـان $U=F_X(X)$ ، فاثبت أن $U \sim Unif\,(0,\,1)$.

[تستخدم هذه الحقيقة في توليد متغيرات عشوائية من توزيعات مختلفة، فمـثلاً إذا كان : $X \sim Exp(\beta)$ ، فإن $U=F_X(X)=1-e^{-\beta X}$. ويكون حل هذه المعادلة هو المتغير العشوائي X الذي يخضع للقـانون الأسـي للاحتمـالات بالبارامتر β ، أي أن :

$$X = -\frac{1}{\beta}\ln(1-U) \quad , U \sim Unif(0,1).$$

فإذا كانت $\beta = 2$ مثلاً ، فإنه بإعطاء U قيماً مختلفة يمكن توليد قيم مقابلة X تخضع للتوزيع الأسي بالبارامتر 2. مثلاً :

U	0.252	0.060	0.965	0.823	0.495
X	0.145	0.031	1.676	0.866	0.342

(8) إذا خضع المتغير العشوائي X لتوزيع وايبل Weibull (α, β) ذي الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\,\beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\alpha x^{\beta}} & , x > 0 \quad , (\alpha > 0, \beta > 0), \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

ولّد خمس قيم للمتغير العشوائي X عندما $\alpha = 2$ ، $\beta = 4$.

(9) إثبت أن القانون الأسي للاحتمالات ليست له ذاكرة، أي إثبت أنه إذا خضع المتغير العشوائي X للقانون الأسي للاحتمالات، فإنه لأي عددين حقيقين موجبين s ، t :

$$P[X > s+t \mid X > s] = P[X > t]$$

(10) إذا خضع المتغير العشوائي Z للتوزيع المعتدل المعياري. فاحسب احتمال أن يأخذ هذا المتغير العشوائي قيماً :

(ii) أكبر من 1.14، (ii) أقل من 0.36-، (iii) بين 0.46-، 0.09-
(iv) بين 0.58-، 1.12.

(11) إذا كانت z_α هي قيمة z التي تجعل $\int_{z_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz=\alpha$ فأوجد قيمة z_α بحيث أن :

(i) $\alpha = 0.05$ (ii) $\alpha = 0.025$ (iii) $\alpha = 0.005$.

(12) إذا كان : $X \sim N(3, 16)$، فاحسب قيمة :

(i) $P[X > 2]$ ، (ii) $P[X > 0.5]$ (iii) $P[-1<X<3]$.

(13) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فاحسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة

(i) على بعد وحدة انحراف معياري σ من المتوسط μ .

(ii) على بعد وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(iii) على بعد ثلاث وحدات انحراف معياري من المتوسط.

(iv) على بعد أربع وحدات انحراف معياري من المتوسط.

(14) إذا كان $Z \sim N(0, 1)$، فاثبت أن : $\lim_{x \to \infty} \dfrac{P\left[Z \geq x + \dfrac{a}{x}\right]}{P[Z \geq x]} = e^{-a}$

(15) إذا خضع المتغير العشوائي X لقانون وايبل بالبارامترات (α, β, γ) ذي التوزيع :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha (x-\gamma)^{\beta}} & , x > \gamma \ , (\alpha, \beta, \gamma > 0) \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

فاثبت أن المتغير العشوائي $Y = \alpha (x - \gamma)^{\beta}$ يخضع للقانون الأسي المعياري ذي التوزيع $F_Y(y) = 1 - e^{-y} , y > 0$, والعكس أيضاً صحيح.

(16) إذا كان $X \sim Unif(-1, 1)$، فاوجد :

(a) $P\left[\,|X| > \dfrac{1}{2}\right]$, (b) $P\left[\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) > \dfrac{1}{3}\right]$,

(c) الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $Y = |X|$

(17) إذا كان $X \sim \chi^2(k)$ ، فاوجد قيمة a التي تحقق :

(i) $P[X > a] = 0.05 \quad , k = 20$.

(ii) $P[X \le a] = 0.975 , k = 18$.

(iii) $P[X > a] = 0.99 \quad , k = 30$.

(18) إذا كان $X \sim t(k)$، فاوجد قيمة a التي تحقق :

(i) $P[X > a] = 0.05 \quad , k = 20$.

(ii) $P[X \le a] = 0.99 , k = 10$.

(iii) $P[X > a] = 0.95 , k = 15$.

(19) إذا كان $X \sim F(m, n)$، فاوجد قيمة a التي تحقق :

(i) $P[X > a] = 0.005 , m_1 = 5 , m_2 = 10$.

(ii) $P[X \le a] = 0.99 , m_1 = 7 , m_2 = 12$.

(iii) $P[X > a] = 0.95 , m_1 = 6 , m_2 = 7$.

(20) إثبت أنه إذا كان $X \sim F(m, n)$ وكان $Z = \frac{1}{X}$ فإن $Z \sim F(n, m)$.

الباب الخامس

التوقع الرياضي Mathematical Expectation

مقدمة :

يكون من الضروري حفي كثير من الأحيان وصف توزيع احتمالي معين "بكمية" تفي بهذا الغرض، والكمية التي تقترح نفسها هي ما تعرف بالتوقع (Expectation) أو القيمة المتوقعة (Expected Value) لمتغير عشوائي X أو المرادف لها الذي يطلق عليه متوسط المتغير العشوائي أو متوسط التوزيع الاحتمالي، والذي يمكن تعميمه ليشمل توقع دالة عامة g(X) لمتغير عشوائي X منفصلاً كان أو متصلاً.

وتوقع متغير عشوائي على درجة كبيرة من الأهمية حيث يؤول متوسط العينة في التجارب المكررة إلى توقع المتغير العشوائي عندما يكون عدد المحاولات كبيراً.

ومتوسط العينة (sample mean) هو المتوسط الحسابي المألوف للبيانات التي تمثل العينة، فإذا كانت العينة ذات الحجم n هي X_1 ،...، X_n فإن متوسط العينة (الذي نرمز له بالرمز $\overline{X}$) هو : $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ، وإذا أخذت العينة القيم التجريبية (البيانات) x_1 ،...، x_n ، فإن متوسط هذه البيانات هو $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

ويختلف متوسط العينة عن متوسط المجتمع (population mean) الذي سحبت منه العينة فمتوسط المجتمع أو متوسط التوزيع (الذي سحبت منه العينة) أو توقع المتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع المجتمع كلها مرادفات لنفس المفهوم

الذي نعبر عنه بالرمز $E(X)$. (لاحظ أن "E" هو الحرف الأول من كلمة Expectation).

متوسط العينة $\overline{X}$ يكون ذاته متغيراً عشوائياً لأنه دالة في متغيرات عشوائية، بينما التوقع (متوسط المجتمع $E(X)$) يكون مقداراً ثابتاً يطلق عليه "بارامتر" توزيع المجتمع.

فعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا عينة ذات حجم كبير من حجارة الترانزيستور، وكان متوسط عمر هذه الحجارة هو مائة ساعة، فإننا نقول إن متوسط توزيع المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة (التوقع) هو مائة ساعة، وهذا هو المقصود بالعبارة القائلة بأنه في التجارب المكررة يؤول متوسط العينة إلى توقع المتغير العشوائي عندما يصبح عدد المحاولات كبيراً.

تعريف (5.1) :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x\, p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \end{cases} \qquad (5.1)$$

بشرط تقارب المتسلسلة أو التكامل تقارباً مطلقاً، ونقول في هذه الحالة إن $E(X) < \infty$.

(5.1) توقع دالة عامة g(X) وحالات خاصة منها

سنكتب تعريفاً لتوقع دالة عامة $g(X)$ في متغير عشوائي X يخضع لقانون احتمالي كتلته هي $p(x)$ أو كثافته $f(x)$، وسنحصل منه على حالات خاصة للدالة $g(X)$ تؤدي إلى توقعات هامة لها استخدامات متعددة.

تعريف (5.2)

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, p(x)\ , \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx\, . \end{cases} \qquad (5.2)$$

بشرط أن $E[g(X)] < \infty$.

حالات خاصة

(5.1.1) : العزوم غير المركزية Noncentral Moments

- عندما $g(X) = X^r$ في (5.2) حيث r عدد صحيح موجب (... ,r = 1, 2)، فإن $E(X^r)$ ، (وهو توقع X^r)، يعرف أيضاً بأنه العزم غير المركزي من رتبة r. وبتطبيق (5.2)، فإنه عندما ... ,r = 1, 2, 3، يكون:

$$E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r p(x) , \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, d x . \end{cases} \tag{5.3}$$

- وعندما r = 1، فإن E(X) فضلاً عن أنه توقع X، و**العزم غير المركزي** من الرتبة الأولى، فإنه يعرف أيضاً **بمتوسط القانون الاحتمالي**. [قارن بتعريف (5.1)] كذلك فإنه عندما r = 2، فإن $E(X^2)$ هو توقع X^2 أو العزم غير المركزي من الرتبة الثانية وهكذا.

وأحياناً ما يرمز للعزم غير المركزي من رتبة r بالرمز μ'_r ، فنكتب $\mu'_r = E(X^r)$ ، (... ,r = 1, 2, 3).

(5.1.2) العزوم المركزية Central Moments

عندما $g(X) = (X - E X)^r$ في (5.2) حيث r عدد صحيح موجب (... ,r = 1,2,3)

فإن : $E(X - EX)^r$ ، [وهو توقع $(X - EX)^r$]، يعرف أيضاً بأنه **العزم المركزي من رتبة r** أو **العزم من رتبة r حول قيمته المتوقعة**.

وبتطبيق (5.2)، فإنه عندما ... ,r = 1, 2, 3 ، يكون :

$$E(X - EX)^r = \begin{cases} \sum_x (x - EX)^r p(x) , \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r f(x)\, d x . \end{cases} \tag{5.4}$$

وأحياناً ما يرمز للعزم المركزي من رتبة r بالرمز μ_r ، فنكتب

$\mu_r = E(X - EX)^r$ ، $(r = 1,2,\ldots)$ ونلاحظ هنا أن العزم المركزي الأول

$(r = 1)$ دائماً ما يساوي صفراً بغض النظر عن القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي

X، ذلك لأن : $E(X - EX) = E(X) - E(X) = 0$.

للعزم المركزي الثاني أهمية خاصة في الإحصاء، ويستخدم كمقياس لانتشار أو تشتت التوزيع حول متوسطه (قيمته المتوقعة)، لذلك فإن هذا العزم يعطي رمزاً خاصاً ويسمى تسمية خاصة.

تعريف (5.3) :

التباين (Variance) والانحراف المعياري (Standard Deviation).

يسمى العزم المركزي الثاني لمتغير عشوائي X تباين توزيع X (أو تباين X) ويرمز له عادة بالرمز $V(X)$ أو σ_X^2 أو ببساطة σ^2 .

ويطلق على الجذر التربيعي الموجب للتباين مسمى **الانحراف المعياري**، فيكون الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X هو σ إذا كان تباينه σ^2 أي أن :

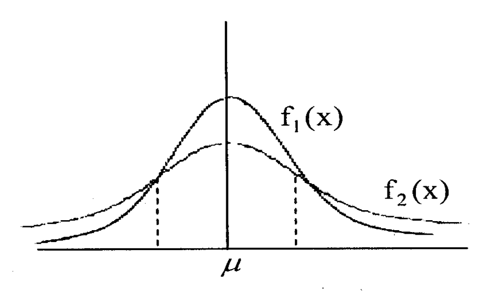
$\sigma = \sqrt{V(X)}$ ، حيث :

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - EX)^2 = \begin{cases} \sum_x (x - EX)^2 p(x) \ , \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \ f(x)\, d\, x \ . \end{cases} \qquad (5.5)$$

مدلول التباين كمقياس للانتشار أو التشتت

التباين σ^2 (أو $V(X)$ أو μ_2 أو $E(X - EX)^2$) هو مقياس للانتشار أو التشتت لتوزيع متغير عشوائي X بمعنى أنه إذا كانت σ^2 صغيرة فإنه من الأرجح (أي باحتمال أكبر) أن يأخذ X قيماً قريبة من متوسط التوزيع $\mu = E\,X$ ،

أي أن تشتته بالنسبة إلى متوسط التوزيع يكون صغيراً. وأما إذا كانت σ^2 كبيرة، فإن احتمال أن تبتعد قيم X عن المتوسط $\mu = E\,X$ يكون كبيراً.



فإذا فرضنا أن المتغيرين العشوائيين X_1، X_2 يخضعان لدالتي الكثافة الاحتماليتين $f_1(x)$، $f_2(x)$ بحيث يكون لهما نفس المتوسط $\mu = E\,X$ ، بينما تباينهما هما σ_1^2، σ_2^2 ، وإذا كان $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ، فإنه يمكن القول بأنه لقيم x القريبة من المتوسط (أي على فترة حول μ) يكون انتشار f_1 أقل من انتشار f_2 (أي أن f_1 يكون اكثر تمركزاً حول المتوسط μ من f_2)، ولكن $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ لا تعني بالضرورة أن f_1 يكون أقل انتشاراً من f_2 لجميع قيم x في نطاق تعريف التوزيعين كما هو مبين بالشكل.

(5.1.3) دالة توليد العزوم Moment Generating Function

عندما $g(x) = e^{tx}$ في (5.2)، حيث t عدد حقيقي، فإن توقع $g(X)$ في هذه الحالة يكون دالة في t، يرمز لها بالرمز $M_X(t)$ أو $M(t)$، وتسمى دالة توليد العزوم المقابلة للقانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X أو ببساطة دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X. أي أنه بافتراض وجودها :

تعريف (5.4) دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X هي :

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx}\, p(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx . \end{cases} \qquad (5.6)$$

وسميت الدالة $M_X(t)$ دالة توليد العزوم لأنه بافتراض وجود هذه الدالة في الفترة $-h < t < h$، $(h > 0)$، وهذا يعني وجود جميع مشتقاتها عند $t = 0$ فإنه يمكن إيجاد العزوم (من رتبة r حيث $r = 1, 2, \ldots$) باشتقاق $M_X(t)$ عدداً من المرات قدره r ثم وضع قيمة t مساوية للصفر. أي أن :

$$E(X^r) = \frac{d^r}{d\,t^r}\left[\,M_X(t)\right]\Big|_{t=0} = M_X^{(r)}(0)\,,\ r = 1, 2, \ldots \qquad (5.7)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (5.6) بالنسبة إلى t عددا من المرات قدره r ثم وضع $t = 0$ في الطرفين تنتج العلاقة (5.7).

بعض خصائص دالة توليد العزوم

(1) ذكرنا أنه ليس لكل توزيع دالة توليد عزوم، ولكن إن أمكن إيجاد دالة توليد عزوم فإن هذه الدالة تكون وحيدة وتحدد التوزيع المقابل للمتغير العشوائي تماماً.

لن نثبت هذه الحقيقة (لأنها تحتاج إلى وسائل أعلى من وسائل هذا الكتاب)، ولكننا نوضح معناها فنقول إنه لكل دالة توليد عزوم يوجد توزيع احتمالي واحد مقابل، والعكس صحيح أي أنه لكل توزيع احتمالي توجد دالة توليد عزوم واحدة. هذه الحقيقة لها أهميتها إذ أننا يمكن التعرف على القانون الاحتمالي لمتغير عشوائي إذا أعطينا دالة توليد عزومه.

وعلينا أن نذكر في هذا الصدد أن عزوم قانون احتمالي معين لا تحدد هذا القانون بصورة موحدة، ولكن دالة توليد عزومه تحدده بصورة موحدة. فيمكننا مثلا أن نجعل $E(X) = 2$ ، $E(X^2) = 5.8$ لقانونين احتماليين مختلفين اختلافا جذرياً : أحدهما ذات حدين بالبارامترين $(n = 20\ ,\ p = 0.1)$ والآخر معتدل بالبارامترين $(\mu = 2\,,\sigma^2 = 1.8)$.

ولكن إذا قلنا إن دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي X هي $M_X(t) = (q + p\,e^t)^n$
فإن $X \sim bin\,(n, p)$، وإذا قلنا إن دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي Y هي

$M_Y(t) = e^{\mu t + \frac{t2\sigma2}{2}}$ ، فإن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وهكذا ...

(2) وجود دالة توليد عزوم $M_X(t)$ لقيم t التي تحقق المتباينة $-h < t < h$ حيث $h > 0$ يحتم وجود مشتقات $M_X(t)$ من جميع الرتب عند $t = 0$.

(3) كما أن $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$ ، فإنه يمكننا القول أيضاً بأن $E(X^r)$ هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك مكلورين لدالة توليد العزوم. إذ أن هذا المفكوك هو

$$M_X(t) = M_X(0) + \frac{t}{1!}M'_X(0) + \ldots + \frac{t^r}{r!}M_X^{(r)}(0) + \ldots.$$
$$= 1 + \frac{t}{1!}E(X) + \ldots + \frac{t^r}{r!}E(X^r) + \ldots$$

لذلك فإن معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك مكلورين لدالة توليد العزوم هو $E(X^r)$، $(r = 1, 2, \ldots)$.

(5.1.4) قواعد المؤثر E

البراهين جميعها ستكون في الحالة المتصلة، ويمكن البرهان في الحالة المنفصلة باتباع نفس الخطوات واستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع.

القاعدة الأولى : حيث c ثابت ، $E(c) = c$

البرهان : $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c,$

لأن $f(x)$ تمثل كثافة احتمالية، فيكون $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

القاعدة الثانية : حيث c ثابت ، $E[c\,h(X)] = c\,E[h(X)]$

البرهان : $E[c\,h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} c\,h(x)\,f(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f(x)\,dx$

$= c\,E[h(X)]$.

نتيجة (1) : $E(c\,X) = c\,E(X)$ ، c ثابت.

نتيجة (2) : $E(a\,X + b) = a\,E(X) + b$ ، a، b ثابتان.

القاعدة الثالثة :

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} h_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{k} E[h_i(X)]$$

البرهان :

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} h_i(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{k} h_i(x)\right] f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty} h_i(x)\,f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} E[h_i(X)].$$

نتيجة : $E[h_1(X) + h_2(X)] = E[h_1(X)] + E[h_2(X)]$

القاعدة الرابعة : إذا كانت $h_1(x) \le h_2(x)$ لجميع قيم x، فإن :

$$E[h_1(X)] \le E[h_2(X)]$$

البرهان : إذا كانت $h_1(x) \le h_2(x)$ لجميع قيم x، فإن :

$$g(x) = [h_2(x) - h_1(x)]\,f(x) \ge 0$$

حيث f(x) هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X (فتكون غير سالبة لجميع قيم x). ومعلوم أن التكامل المحدود للدوال غير السالبة يكون غير سالب، لذلك فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}[h_2(x) - h_1(x)]\,f(x)\,dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h_2(x)\,f(x)\,dx \ge \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\,f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow E[h_1(X)] \le E[h_2(X)]$$

ملاحظات :

الملاحظة الأولى :

لعل تعبير "العزوم" يكون قد اقتبس من الفيزياء، إذ أنه إذا كانت قيم $p(x)$ تمثل الكتل المؤثرة عمودياً على محور x وعلى أبعاد من نقطة الأصل، فـإن μ_1' سيكون هو الإحداثي x لمركز الثقل والذي يحسب عادة كخارج قسمة العزم الأول على مجموع الكتل : $\sum_{x} p(x) = 1$. كما أن μ_2' سيكون هو عزم القصور الذاتي، ولعل هذا يفسر أيضا الحكمة من استخدام تعبير "حول نقطة الأصل" ـــ حينما نتحدث عن العزوم المركزية ــ مقارنة بالفيزياء، إذ أن جميع الأبعاد تكون محسوبة من نقطة الأصل.

كما أن المقارنة تكون أيضاً قائمة في حالة ما يكون المتغير العشوائي X متصلاً، إذ أن μ_1' ، μ_2' يمثلان الإحداثي x لمركز الثقل وعزم القصور الذاتي لقضيب مختلف الكثافة.

الملاحظة الثانية :

باستخدام قواعد المؤثر E يمكن كتابة العزم المركزي من رتبة r بدلالة العزوم غير المركزية، فمثلاً :

$$E(X - E\,X)^r = E\left[\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} X^j (-E\,X)^{r-j}\right]$$

وباستخدام القواعد الثلاث الأولى ومعاملة $E\,X$ على أنه ثابت، فإن :

$$E\,(X - E\,X)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} E(X^j)\,(EX)^{r-j}$$

فإذا كتبنا μ_r للعزم المركزي من رتبة r، أي $\mu_r = E(X - EX)^r$ وكتبنـــا μ'_j للعزم غير المركزي من رتبة j، فإنه لقيم $r = 1, 2, \ldots$ يكون :

$$\mu_r = E(X - E X)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \mu'_j (\mu'_1)^{r-j} \qquad (5.8)$$

فمثلاً، عند $r = 2$، فإن التباين (العزم الثاني المركزي) هو :

$$V(X) = \mu_2 = E(X - E X)^2 = \sum_{j=0}^{2} (-1)^{2-j} \binom{2}{j} \mu'_j (\mu'_1)^{2-j}$$

$$= \mu'_0 (\mu'_1)^2 - \binom{2}{1} \mu'_1 . \mu'_1 + \mu'_2$$

وبملاحظة أن : $\mu'_0 = E(X^0) = 1$ ، وأن $\binom{2}{1} = 2$، فإن :

$$V(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = E(X^2) - (EX)^2 . \qquad (5.9)$$

الصيغة (5.5) هي تعريف عام للتباين، والصيغة (5.9) تستخدم عادة في حـــساب التباين كما سيتضح من الأمثلة.

ويمكن الحصول على الصيغة (5.9) من التعريف في (5.5) مباشرة، إذ أن :

$$V(X) = E(X - E X)^2 = E\left[X^2 - 2 X E X + (E X)^2\right]$$

ونظراً لأن $E(X)$ عدد ثابت، فإنه بتطبيق قواعد المؤثر E نحصل على :

$$V(X) = E(X^2) - 2 E(X) E(X) + (E X)^2$$
$$= E(X^2) - (E X)^2$$

الملاحظة الثالثة :

الصيغة (5.8) هي صيغة عامة للعزم المركـــزي مـــن أي رتبـــة r ($r=1, 2, \ldots$) بدلالة العزوم غير المركزية، فيمكننا ـــ مثلاً ـــ إيجاد العزم الثالث المركزي بدلالة العزوم غير المركزية باستخدام الصيغة (5.8) كالآتي :

$$\mu_3 = E(X - EX)^3 = \sum_{j=0}^{3} (-1)^{3-j} \binom{3}{j} \mu'_j (\mu'_1)^{3-j}$$

$$= -\mu'_0 (\mu'_1)^3 + \binom{3}{1} \mu'_1 (\mu'_1)^2 - \binom{3}{2} \mu'_2 (\mu'_1) + \mu'_3$$

$$= \mu'_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$$ (لاحظ أن $\mu'_0 = 1$)

أي أن :

$$E(X - EX)^3 = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2(EX)^3. \qquad (5.10)$$

وهكذا للعزوم المركزية من أي رتبة.

$V(aX + b) = a^2 V(X)$ لأن

$$V(aX + b) = E[aX + b - E(aX + b)]^2$$
$$= E[aX + b - aE(X) - b]^2$$
$$= E[a(X - EX)]^2$$
$$= a^2 E(X - EX)^2$$
$$= a^2 V(X)$$

(5.1.5) الدالة المميزة Characteristic Function

لا يكون أحياناً لدالة العزوم وجود حيث تكون المتسلسلة (أو يكون التكامل) في (5.6) تباعدية، فإذا أدخلنا العدد التخيلي i (حيث $i = \sqrt{-1}$) بحيث تصبح $g(X) = e^{itX}$ بدلاً من e^{tX} ، فإن توقع هذه الدالة البديلة (وهو أيضاً دالة في t) لا يمكن أن يكون تباعدياً ، ويسمى هذا التوقع **الدالة المميزة** المقابلة للقانون الاحتمالي، وهذه الدالة موجودة دائماً لجميع قيم t، ويرمز لها عادة بالرمز $\varphi_X(t)$ أو $\varphi(t)$، فيكون :

تعريف (5.5) : الدالة المميزة لمتغير عشوائي X هي :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_x e^{itx}\, p(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx . \end{cases} \tag{5.11}$$

حيث $i = \sqrt{-1}$.

الدالة المميزة تكون موجودة دائماً (لجميع قيم t الحقيقية) لأن :

$$|\varphi_X(t)| = \left| E(e^{itX}) \right| \le E\left| e^{itX} \right|$$
$$= E\left[\sqrt{\cos^2(tX) + \sin^2(tX)}\right] = E(1) = 1,$$

لجميع قيم t الحقيقية.

وهي تقوم بنفس دور دالة توليد العزوم من ناحية توليدها للعزوم من رتبة r ـــ إن كان لهذه العزوم وجود ـــ مع اختلاف طفيف نتيجة إدخال العدد التخيلي i، وفـــي هذه الحالة يكون :

$$E(X^r) = \frac{1}{i^r} \frac{d^r}{dt^r}\left[\varphi_X(t)\right]\Big|_{t=0} = \frac{\varphi_X^{(r)}(0)}{i^r}, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{5.12}$$

وإثبات هذه الحقيقة يكون أيضاً باشتقاق طرفي المعادلة (5.11) بالنسبة إلى t عدداً وقدره r من المرات $(r = 1, 2, \ldots)$ ثم التعويض عن $t = 0$ في طرفي المعادلة. فإذا أمكن استبدال المشتقة (بالنسبة إلى t) بالمؤثر E، فإن :

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi_X(t)\right] = E\left[iX e^{itX}\right] \Rightarrow \varphi_X^{(1)}(0) = i\,E(X)$$

وهكذا

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[\varphi_X(t)\right] = E\left[(iX)^r e^{itX}\right] \Rightarrow \varphi_X^{(r)}(0) = i^r E(X^r) .$$

كما يمكن الحصول على $E(X^r)$ بإيجاد معامل $\frac{(it)^r}{r!}$ في مفكوك مكلورين للدالة المميزة.

ترتبط الدالة المميزة لمتغير عشوائي X بدالة توليد العزوم بالعلاقة

$$\varphi_X(t) = M_X(i\,t)$$

وهي تكافئ :

$$M_X(t) = \varphi_X(-i\,t)$$

ذلك لأنه من تعريف الدالة المميزة :

$$\varphi_X(t) = E(e^{i\,t\,X}) = E(e^{u\,X}) = M_X(u) = M_X(i\,t)$$

كذلك نلاحظ أنه من تعريف دالة توليد العزوم :

$$M_X(t) = E(e^{t\,X}) = E(e^{i(-i\,t)X}) = \varphi_X(-i\,t)$$

(5.1.6) دالة توليد التجمعات Cumulant Generating Function

يكون التعامل أحياناً مع لوغاريتم دالة توليد العزوم أيسر من التعامل مع هذه الدالة ذاتها، ويسمى لوغاريتم دالة توليد العزوم بالمسمى دالة توليد التجمعات (cumulant generating function) ذلك لأنها تولد "التجمعات" (cumulants) بدلاً من العزوم، ونظراً لأن هناك علاقة لوغاريتمية بين دالة توليد التجمعات ودالة توليد العزوم فإن البداهة تقضي بأن هناك علاقة بين التجمعات والعزوم والعكس (أي علاقة بين العزوم والتجمعات). أنظر المسألة (47) في تمارين (5).

تعريف (5.6) تسمى الدالة التي يرمز لها بالرمز $K_X(t)$ ــ دالة توليد التجمعات إذا ارتبطت بدالة توليد العزوم بالعلاقة :

$$K_X(t) = \ln\left[M_X(t)\right]. \qquad (5.13)$$

ويسمى معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك ماكلورين لدالة توليد التجمعات، التجمع من رتبة r للمتغير العشوائي X ويرمز له بالرمز $\kappa_r(X)$ أو κ_r.

كما يمكن الحصول على التجمع κ_r $(r = 1, 2, \ldots)$ باشتقاق طرفي (5.13) r مرة ثم وضع $t = 0$ [أنظر المسألة (47) في تمارين (5)].

(5.1.7) دالة توليد العزوم الضربية
Factorial Moment Generating Function

إذا أخذنا في تعريف (5.2) الدالة $g(X)$ لتكون $g(X) = t^X$، فــإن $E(t^X)$ يكون دالة في t تسمى دالة توليد العزوم الضربية، ونحصل على العزوم الــضربية كما في حالــة العزوم بإيجاد المشتقات للدالــة $E(t^X)$ بالنسبة إلى t ووضع $t = 1$ (بدلاً من $t = 0$ في حالة توليد العزوم).

وتسهل دالة توليد العزوم الضربية إيجاد العزوم في بعض الحالات التي يكون فيها المتغير العشوائي X متقطعاً.

تعريف (5.7) دالة توليد العزوم الضربية، ونرمز لها بالرمز $\Psi_X(t)$ هي :

$$\Psi_X(t) = E(t^X) = \begin{cases} \sum_x t^x \, p(x) \quad , \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^x \, f(x) \, dx \ . \end{cases} \tag{5.14}$$

ونلاحظ أنه باشتقاق $\Psi_X(t)$ بالنسبة إلى t عدداً من المرات قدره r ثم التعــويض عن قيمة $t = 1$، فإننا نحصل على العزم الضربي من رتبة r :

$$E\left[X(X-1)\ldots(X-r+1) \right] = \frac{d^r}{d\,t^r}\left[E(t^X) \right] \Big|_{t=1} \tag{5.15}$$

مثال (5.1) : إحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري ودالة توليد العــزوم لكل من القوانين الاحتمالية الآتية :

$$\text{(i)}\ p(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} \left| 2x - 3 \right| , & x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 , \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 4x^2 e^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(iv) يخضع المتغير العشوائي X للقانون الاحتمالي

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, ..., 6 \\ 0, & e. w. \end{cases}$$

والمطلوب هو حساب المتوسط والتباين والانحراف المعياري ودالة توليد العــزوم للمتغير العشوائي Y حيث $Y = 2X^2 + 1$

(v) تحتوي مجموعة مكونة من اثني عشر جهازاً من أجهــزة التليفزيــون علــى جهازين معيبين فإذا شحنت ثلاثة أجهزة من الاثنى عشر جهــازاً إلــى أحــد الفنادق، وإذا مثل المتغير العشوائي X عدد الأجهزة المعيبة المــشحونة إلــى الفندق، فاوجد :

(i) $E(X)$ (ii) $V(X)$ (iii) $M_X(t)$

الحل : (i) يتكون نطاق التعريف الذي تكون عليه دالة الكتلة الاحتمالية p(x) موجبة من ست نقاط فقط، لذلك فيمكن كتابة دالة الكتلة على الصورة الجدولية الآتية :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}\,|\,2x - 3\,|, & x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ 0 & , e. w. \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2	3	
p(x)	7/20	5/20	3/20	1/20	1/20	3/20	
xp(x)	-14/20	-5/20	0	1/20	2/20	9/20	-7/20 = E(X)
$x^2p(x)$	28/20	5/20	0	1/20	4/20	27/20	65/20= $E(X^2)$
$e^{tx}p(x)$	$7e^{-2t}/20$	$5e^{-t}/20$	3/20	$e^{t}/20$	$e^{2t}/20$	$3e^{2t}/20$	

متوسط القانون الاحتمالي هو : $E(X) = \sum_x x\,p(x) = -\frac{7}{20} = -0.35$

تباين القانون الاحتمالي هو : $V(X) = E(X^2) - (E\,X)^2$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\,p(x) = \frac{65}{20}$$

$$V(X) = \frac{65}{20} - \frac{49}{400} = \frac{1251}{400} = 3.1275$$

الانحراف المعياري هو : $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3.1775} \cong 1.7685$

دالة توليد العزوم هي :

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}\, p(x)$$

$$M_X(t) = e^{-2t}\, p(-2) + e^{-t}p(-1) + e^{(0)t}p(0) + e^{t}p(1) + e^{2t}p(2) + e^{3t}p(3)$$

$$= \frac{1}{20}\left[7\, e^{-2t} + 5\, e^{-t} + 3 + e^{t} + e^{2t} + 3\, e^{3t}\right]$$

[لاحظ أنه بافتراض إعطائنا $M_X(t)$ فإنه يمكننا الحصول علـــى العـــزمين الأول والثاني باشتقاق $M_X(t)$ مرتين ثم وضع $t = 0$ كالآتي :

$$M'_X(t) = \frac{1}{20}\left[-14\, e^{-2t} - 5\, e^{-t} + e^{t} + 2\, e^{2t} + 9\, e^{3t}\right]$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M'_X(0) = -\frac{7}{20}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{20}\left[28\, e^{-2t} + 5\, e^{-t} + e^{t} + 4e^{2t} + 27\, e^{3t}\right]$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M''_X(0) = \frac{65}{20}$$

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2\, e^{-2x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \text{ e.w.} \end{cases}$$

متوسط القانون (بالتعريف) هو : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx}_{0} + \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} x^3\, e^{-2x}\, dx = 4\,\frac{\Gamma(4)}{2^4} = \left(\frac{1}{4}\right)(6) = 1.5$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,f(x)\,dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}x^2\,f(x)\,dx}_{0}+\int_{0}^{\infty}x^2\,f(x)\,dx$$

$$=4\int_{0}^{\infty}x^4\,e^{-2x}dx=\frac{4\,\Gamma(5)}{2^5}=\left(\frac{1}{8}\right)(4!)=3$$

تباين القانون هو :
$$V(X)=E(X^2)-(E\,X)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

الانحراف المعياري هو :
$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

دالة توليد العزوم :
$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\,f(x)\,dx$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}e^{tx}\,f(x)\,dx}_{0}=\int_{0}^{\infty}e^{tx}\,f(x)\,dx$$

$$=4\int_{0}^{\infty}e^{tx}\,.\,x^2\,e^{-2x}\,dx$$

$$=4\int_{0}^{\infty}x^2\,e^{-(2-t)x}\,dx$$

$$=\frac{4\,\Gamma(3)}{(2-t)^3}=\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-3}$$

[لاحظ أن القانون الاحتمالي في هذه المسألة هو قانون جاما للاحتمالات بالبارامترين $\alpha=3$ ، $\beta=\frac{1}{2}$ ، وعلى وجه العموم، فإنه إذا كان : $X\sim G(\alpha\,,\beta)$

فإن : $E(X)=\alpha\,\beta\ ,\ \ V(X)=\alpha\,\beta^2$

$$M_X(t)=(1-\beta\,t)^{-\alpha}$$

فبالتعويض عن $\alpha=3$ ، $\beta=\frac{1}{2}$ فإننا نحصل على نفس النتائج التي حصلنا عليها].

(iii) $$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ ,\ -\infty<x<\infty$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, d\,x \;=\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, d\,x$$

باستخدام التعويض : $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ، فإن $d\,z=\dfrac{d\,x}{\sigma}$، ويصبح :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, d\,z$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-z^2/2}\, d\,z+\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, d\,z.$$

قيمة التكامل الأول صفراً لأنه تكامل دالة فردية على المجال $(-\infty,\infty)$، والتكامـــل في الحد الثاني قيمته واحد لأن الدالة $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$ دالة كثافة احتمالية للقـــانون المعتدل المعياري على المجال $(-\infty,\infty)$. لذلك فإن :

$$E(X)=\mu \qquad (5.16)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, d\,x \;=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, d\,x$$

وباستخدام نفس التعويض السابق، فإننا نحصل على :

$$E(X^2)=\int_{\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, d\,z$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2\, e^{-z^2/2}\, d\,z+\frac{2\,\mu\,\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-z^2/2}\, d\,z$$

$$+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} d\,z$$

قيمة التكامل في الحد الثاني صفراً، وفي الحد الثالث واحد، وفي الحد الأول يكـــون التكامل لدالة زوجية على الفترة $(-\infty,\infty)$ هو ضعف التكامل لهذه الدالة على الفترة $(0,\infty)$. لذلك فإن :

$$E(X^2)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} z^2\, e^{-z^2/2}\, d\,z\;+\mu^2$$

وباستخدام التعويض $\omega = \frac{z^2}{2}$ فإن $z = \sqrt{2\,\omega}$ ويكون $d\,z = \frac{\sqrt{2}\,d\,\omega}{2\sqrt{\omega}}$

لذلك فإن :
$$E(X^2) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (2\,\omega)\, e^{-\omega} \frac{\sqrt{2}\,d\,\omega}{2\sqrt{\omega}} + \mu^2$$

أي أن :
$$E(X^2) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \omega^{1/2} e^{-\omega}\, d\omega + \mu^2$$
$$= \frac{2\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \mu^2 = \frac{2\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \mu^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2$$

لذلك فإن تباين القانون هو :
$$V(X) = \sigma^2 \qquad (5.17)$$

والانحراف المعياري له هو : σ .

دالة توليد العزوم المقابلة للقانون المعتدل $N(\mu, \sigma^2)$ هي :
$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, d\,x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\,x$$

وباستخدام التعويض: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، فإن $d\,z = \frac{d\,x}{\sigma}$ ، وتصبح
$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma z + \mu)} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-z^2/2}\, d\,z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q/2}\, d\,z,$$

حيث :
$$Q = z^2 - 2\,t\,(\sigma\, z + \mu)$$
$$= z^2 - 2\,t\,\sigma\, z - 2\,t\,\mu$$
$$Q = (z - t\,\sigma)^2 - t^2\,\sigma^2 - 2\,t\,\mu$$

وتصبح دالة توليد العزوم على الصورة :

$$M_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(z-\sigma t)^2-2\mu t-\sigma^2 t^2\right]}\,dz$$

$$=e^{\mu t+\sigma^2\left(\frac{t2}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2}\,dz$$

وقيمة التكامل هي واحد لأنه يمثل المساحة تحت كثافة التوزيع المعتدل بالبارامترين $(\sigma t, 1)$. لذلك فإن دالة توليد العزوم تصبح :

$$M_X(t)=e^{\mu t+\sigma^2\left(\frac{t2}{2}\right)} \qquad (5.18)$$

[**ملحوظة :** البارامتران μ ، σ^2 في القانون المعتدل هما متوسط وتباين القانون فحينما نكتب $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن هذه العبارة تعني أن X يخضع للقانون المعتدل بمتوسط μ وتباين σ^2 ، أي أن $E(X)=\mu$ ، $V(X)=\sigma^2$].

(iv) سنكتب الكتلة الاحتمالية في جدول

x	1	2	3	4	5	6	
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$y=2x^2+1$	3	9	19	33	51	73	
p(y)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
y p(y)	3/6	9/6	19/6	33/6	51/6	73/6	188/6
$y^2p(y)$	9/6	81/6	361/6	1089/6	2601/6	5329/6	9470/6

$$Y=2X^2+1$$

ويكون القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي Y هو نفس القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي عند قيم y الممثلة في الجدول.

$$E(Y)=E(2X^2+1)=\frac{188}{6}=\frac{94}{3}$$

$$E(Y^2)=E(2X^2+1)^2=\frac{9470}{6}=\frac{4735}{3}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E\,Y)^2 = \frac{4735}{3} - \left(\frac{94}{3}\right)^2 = \frac{5369}{9} \cong 596.56$$

والانحراف المعياري هو : $\sqrt{V(X)} \cong 24.42$

وتكون دالة توليد العزوم على الصورة :

$$M_Y(t) = \sum_y e^{ty}\, p(y)$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^{3t} + e^{9t} + e^{19t} + e^{33t} + e^{51t} + e^{73t}\right]$$

كان من الممكن حساب هذه التوقعات جميعها باستخدام دالة الكتلة للمتغير العشوائي X، إذ أن :

$$E(2X^2+1) = 2E(X^2) + 1$$

$$V(2X^2+1) = 4V(X^2) = 4\left[E(X^4) - (E\,X^2)^2\right]$$

$$M_{2X^2+1}(t) = E\left[e^{t(2X^2+1)}\right] = e^t\, E(e^{2tX^2})$$

وباستخدام جدول x، نلاحظ الآتي :

x	1	2	3	4	5	6	
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$x^2p(x)$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$\sum_x x^2p(x) = 91/6 = E(X^2)$
$x^4p(x)$	1/6	16/6	81/6	256/6	625/6	1296/6	$\sum_x x^4p(x) = 2275/6 = E(X^4)$

فيكون :

$$E(2X^2+1) = 2\left(\frac{91}{6}\right) + 1 = \frac{94}{3}\ ,$$

$$V(2X^2+1) = 4\left[\frac{2275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2\right] = \frac{5369}{9},$$

$$M_{2X^2+1}(t) = e^t\, E(e^{2tX^2}) = e^t \sum_x e^{2tx^2}\, p(x)$$

$$M_{2X^2+1} = \frac{e^t}{6}\left[e^{2t} + e^{8t} + e^{18t} + e^{32t} + e^{50t} + e^{72t}\right]$$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها من قبل للمتغير العشوائي $Y = 2X^2 + 1$

(v) القانون الاحتمالي في هذه الحالة هو القانون فوق الهندسي للاحتمالات ذو الكتلة الاحتمالية

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{2}{x}\binom{10}{3-x}}{\binom{12}{3}} & , x = 0, 1, 2, \\ 0 & , e.\ w. \end{cases}$$

ويمكن وضعه أيضاً في جدول

X	0	1	2	
p(x)	12/22	9/22	1/22	
xp(x)	0	9/22	2/22	0.5 = E X
$x^2p(x)$	0	9/22	4/22	13/22 = E X^2

$$E(X) = 0.5\ ,\ E(X^2) = \frac{13}{22} \Rightarrow V(X) = \frac{13}{22} - \frac{1}{4} = \frac{26-11}{44} = \frac{15}{44}$$

الانحراف المعياري هو $\sqrt{V(X)} = 0.5839$.

ودالة توليد العزوم هي :

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}\, p(x)$$
$$= \frac{1}{22}\left[12 + 9e^t + e^{2t}\right]$$

مثال (5.2) : إذا كان : $X \sim bin\ (n, p)$، فاثبت أن :

$$E(X) = n\,p$$

$$V(X) = n\,p\,q \quad , \quad M_X(t) = (q + p\,e^t)^n$$

الحل :

$$X \sim bin\,(n\,,p) \Rightarrow p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-q} & , x = 0, 1, ..., n \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{x} x\, p(x) = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x}\, p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$$

$$= n\,p \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1}\, q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= n\,p \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^{y}\, q^{m-y} \quad , (y = x-1, m = n-1)$$

$$= n\,p$$

$$E[X\,(X-1)] = \sum_{x} x\,(x-1)\,p(x) = \sum_{x=2}^{n} x\,(x-1) \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-x}$$

$$= \; n\,(n-1)\,p^{2} \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2}\, q^{(n-2)-(x-2)}$$

$$= n(n-1)p^{2} \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^{y}\, q^{m-y} \;, \; (y = x-2, m = n-2)$$

$$= n\,(n-1)\,p^{2}$$

$$E(X^{2}) = E[X\,(X-1) + X] = E[X\,(X-1)] \; + E(X)$$

$$E(X^{2}) = n\,(n-1)\,p^{2} + n\,p = n\,p\,[(n-1)\,p + 1] \;.$$

$$V(X) = E(X^{2}) - (E\,X)^{2} = n\,p\,[(n-1)\,p + 1] - (n\,p)^{2}$$

$$= n\,p\,[(n-1)\,p + 1 - n\,p] = n\,p\,[1-p]$$

$$M_{X}(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx}\, p(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-x}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p e^t)^x q^{n-x}$$
$$= (q + p e^t)^n .$$

الملاحظة الخامسة :

عند حساب التباين فإننا غالباً ما نحتاج إلى حساب العزم الثاني غير المركزي $E(X^2)$. ولحساب هذا العزم في حالة ما إذا كان X خاضعاً لكتلة احتمالية يوجد في مقامها مضروب (مثل ذات الحدين وبواسون وغيرهما)، فإننا نحسب أولاً $E[X(X-1)]$ ثم نستخدم في حساب $E(X^2)$ المتطابقة :

$$X^2 = X(X-1) + X$$

على أساس أن : $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$.

مثال (5.3) : لقانون احتمالي (في الحالة المنفصلة) لا توجد مقابله دالة توليد عزوم.

من المعلوم أن : $\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

لذلك فإن :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2 x^2} & , \ x = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & , \ \text{o.w.} \end{cases}$$

تمثل دالة كتلة احتمالية لمتغير عشوائي منفصل.

دالة توليد العزوم المقابلة لهذه الكتلة (إن كان لها وجود) هي :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{6}{\pi^2 x^2}\right)$$

ويمكن (باستخدام اختبار النسبة) إثبات أن هذه المتسلسلة النهائية تباعدية إذا كانت $t > 0$. لذلك فإنه لا يكون للدالة $M_X(t)$ وجود لأي عدد h بحيث أن $-h < t < h$.

لذلك فإن دالة الكتلة الاحتمالية $p(x)$ في هذا المثال ليس لها دالة توليد عزوم مقابلة.

من القوانين الاحتمالية المعروفة التي ليس لها دالة توليد عـــزوم وبالتـــالي ليس لها أي عزوم هو قانون كوشي للاحتمالات ذو الكثافة الاحتمالية المعطاة فـــي الحالة المعيارية في الباب الرابع، إذ أن :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi\left[1+x^2\right]} dx$$

وهذا التكامل تباعدي. بينما توجد دالة مميزة لهذا القانون (لن نثبتها هنا) وهي :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\pi\left[1+x^2\right]} dx = e^{-|t|}$$

ويمكن ملاحظة عدم وجود أي من العزوم لقانون كوشي للاحتمالات. بكتابة العزم الأول كالآتي :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi\left[1+x^2\right]} dx$$

وهو تكامل تباعدي، وهكذا بالنسبة إلى أي عزم أعلى من العزم الأول.

مثال (5.4) : لقانون احتمالي (في الحالة المتصلة) ليس له عزوم

إعتبر دالة الكثافة الاحتمالية : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , x > 1 , \\ 0 & , e.w. \end{cases}$

$$E(X) = \int_1^{\infty} x\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \lim_{c\to\infty} (\ln c).$$

وهو ليس له وجود (يكون موجوداً فقط إذا كانت قيمته محدودة وأما إذا كانت قيمته لانهائية فإننا نقول إنه ليس له وجود).

الملاحظة السادسة :

عدم وجود العزم الأول لأي قانون احتمالي يعني عدم وجود أي عزم آخر يعلو العزم الأول.

مثال (5.5) : إثبت أنه إذا كانت $M_Z(t)=e^{t^2/2}$ ، فإن :

$$E(Z^n)=\begin{cases}0 & , n=2k-1\\ 1.3.5\ldots(2k-1), & n=2k\end{cases}, k=1,2,\ldots$$

لاحظ أن دالة توليد العزوم في هذا المثال تقابل القانون المعتدل المعياري $N(0, 1)$.

الحل : $E(Z^n)$ هو معامل $\frac{t^n}{n!}$ في مفكوك مكلورين لدالة توليد العزوم.

$$M_Z(t)=1+\left(\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k+\ldots$$

$$=1+\frac{t^2}{2!}+\frac{3t^4}{4!}+\ldots+\frac{[(2k-1)(2k-3)\ldots5.3.1]t^{2k}}{(2k)!}+\ldots$$

فإذا كانت n فردية (أي $n=2k-1$ حيث $k=1, 2, \ldots$، أي عندما $n=1, 3, 5$)

فإن معامل $\frac{t^n}{n!}$ في المفكوك يكون مساويا للصفر.

وإذا كانت n زوجية (أي $n=2k$ حيث $k=1,2, \ldots$، أي عندما $n=2, 4,6, \ldots$)

فإن معامل $\frac{t^n}{n!}$ هو $1 . 3 . 5 \ldots (2k-3) (2k-1)$. لذلك فإن :

$$E(X^n)=\begin{cases}0 & , n=2k-1\\ 1.3.5\ldots(2k-1) & , n=2k\end{cases}, k=1,2,\ldots$$

هذا المثال يعطي جميع العزوم للقانون المعتدل المعياري $N(0, 1)$.

مثال (5.6) : دالة توليد العزوم لقانون بواسون للاحتمالات هي : $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$

أوجد العزوم الثلاثة الأولى غير المركزية ومن ذلك التباين والعزم الثالث المركزي.

الحل :

$$M_X^{(1)}(t)=\lambda e^t . e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_X^{(2)}(t) = \lambda e^t \left[\lambda e^t + 1 \right] e^{\lambda (e^t - 1)}$$
$$M_X^{(3)}(t) = \lambda e^t \left[\lambda^2 e^{2t} + 3\lambda e^t + 1 \right] e^{\lambda (e^t - 1)}$$
$$\Rightarrow E(X) = M_X^{(1)}(0) = \lambda \ , E\left(X^2\right) = M_X^{(2)}(0) = \lambda \ (\lambda + 1) .$$
$$E(X^3) = M_X^{(3)}(0) = \lambda \ \left[\lambda^2 + 3\lambda + 1\right] .$$

التباين هو :

$$V(X) = E(X^2) - (E\,X)^2$$
$$= \lambda (\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

العزم الثالث المركزي هو :

$$E(X - E\,X)^3 = E(X - \lambda)^3$$
$$= E\left[X^3 - 3X^2 \lambda + 3X\lambda^2 - \lambda^3\right]$$
$$= E(X^3) - 3\lambda E(X^2) + 3\lambda^2 E(X) - \lambda^3$$
$$= \lambda (\lambda^2 + 3\lambda + 1) - 3\lambda^2 (\lambda + 1) + 2\lambda^3$$
$$= \lambda$$

لاحظ في هذا المثال أن المتوسط والتباين والعزم الثالث المركزي لقانون بواسون (λ) كلها تساوي λ .

مثال (5.7) : متوسط وتباين خليط مكون من k من المكونات

إفرض أن X متغير عشوائي متصل يخضع لدالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j \, f_j(x) \quad ,$$

حيث $0 \le p_j \le 1$ (لجميع قيم k ,... ,j = 1)، $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$ ، $f_j(x)$ (تسمى المكون j في الخليط) هي دالة كثافة احتمالية متوسطها هو μ_j وتباينها σ_j^2 . إثبت أن متوسط الخليط وتباينه هما :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{k} p_j \, \mu_j \, , V(X) = \sum_{j=1}^{k} p_j \left[\sigma_j^2 + \left(\mu_j - E\,X\right)^2\right].$$

الحل : بافتراض أن المتغير X هو متغير عشوائي متصل، فإن :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, d\, x \ = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\sum_{j=1}^{k} p_j\, f_j(x) \right] d\, x$$
$$= \sum_{j=1}^{k} p_j \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_j\,(x)\, d\, x \ = \sum_{j=1}^{k} p_j\, \mu_j \ ,$$

حيث μ_j هو متوسط المكون j من الخليط : $\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_j(x)\, d\, x$.

ويكون تباين الخليط هو :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2\, f(x)\, d\, x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\,X)^2 \sum_{j=1}^{k} p_j\, f_j(x)\, d\, x$$
$$= \sum_{j=1}^{k} p_j \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\,X)^2\, f_j(x)\, d\, x$$
$$= \sum_{j=1}^{k} p_j \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x - \mu_j) + (\mu_j - E\,X)\right]^2 f_j(x)\, d\, x$$
$$= \sum_{j=1}^{k} p_j \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_j)^2\, f_j(x)\, d\, x \ + (\mu_j - E\,X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, d\, x \ \right]$$
$$= \sum_{j=1}^{k} p_j \left[\sigma_j^2 + (\mu_j - E\,X)^{\,2} \right].$$

لاحظ أن الحد الأوسط في مفكوك المقدار المربع يساوي صفراً لأن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_j)\,(\mu_j - E\,X)\, f_j(x)\, d\, x$$
$$= (\mu_j - E\,X) \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_j)\, f_j(x)\, d\, x = 0\, ,$$

كما أن : $\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, d\, x = 1$ لأن $f_j\,(x)$ تمثل كثافة احتمالية.

مثال (5.8) : أوجد العزم الضربي من الرتبة الثالثة لقانون ذات الحدين للاحتمالات.

الحل : يمكن إيجاد هذا العزم إما باستخدام دالة توليد العـــزوم الـــضربية، أو مـــن

التعريف المباشر للعزم الضربي من الرتبة الثالثة. **باستخدام دالة توليـــد العـــزوم الضربية**

$$\Psi_X(t) = E(t^X) = \sum_x t^x \; p(x) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x \; q^{n-x}$$

$$\Psi_X(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p\,t)^x \; q^{n-x} = (q + p\,t)^n$$

باشتقاق دالة توليد العزوم الضربية $\Psi_X(t)$ بالنسبة إلى t ثلاث مرات فإن :

$$\Psi_X^{(1)}(t) = n\,p\,(q + p\,t)^{n-1}$$

$$\Psi_X^{(2)}(t) = n\,(n-1)\,p^2\,(q + p\,t)^{n-2}$$

$$\Psi_X^{(3)}(t) = n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3\,(q + p\,t)^{n-3}$$

وبوضع $t = 1$ في $\Psi_X^{(3)}(t)$ ، فإننا نحصل على العزم الضربي من الرتبة الثالثـــة لقانون ذات الحدين للاحتمالات :

$$E[X(X-1)(X-2)] = \Psi_X^{(3)}(1) = n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3$$

وباستخدام التعريف المباشر

$$E[X(X-1)(X-2)] = \sum_x x\,(x-1)\,(x-2)\,p(x)$$

$$E[X(X-1)(X-2)] = \sum_{x=3}^{n} x\,(x-1)\,(x-2)\binom{n}{x} p^x \; q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=3}^{n} \frac{n!}{(x-3)!\,(n-x)!}\, p^x \; q^{n-x}$$

$$= n(n-1)\,(n-2)\,p^3 \sum_{x=3}^{n} \frac{(n-3)!}{(x-3)!\,(n-x)!}\, p^{x-3} \; q^{(n-3)-(x-3)}$$

وبوضع $y = x - 3$، فإنه عندما $x = 3$ تكون $y = 0$

وعندما $x = n$ تكون $y = n - 3$

وبأخذ $m = n - 3$، فإن :

$$E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y q^{m-y}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3$$

مثال (5.9) : العلاقة بين التجمعات والعزوم (وبين العزوم والتجمعات)

ذكرنا أن التجمع من رتبة r (κ_r) هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك مكلورين لدالة توليد التجمعات $K_X(t)$. أي أن κ_r هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في المفكوك :

$$K_X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \kappa_r \tag{5.19}$$

لاحظ أن :

$$K_X(t) = \ln[M_X(t)] = \ln\left[1 + \frac{t}{1!}\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \dots\right]$$
$$= \ln\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\mu_j'\right] = \ln[1 + z]$$

حيث $z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\mu_j'$. وبكتابة مفكوك $\ln(1+z)$، فإننا نحصل على :

$$K_X(t) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \tag{5.20}$$

وبمقارنة (5.19)، (5.20)، فإن :

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!}\kappa_r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\mu_j'\right)^r$$

وبمقارنة معاملات $\frac{t^r}{r!}$ في الطرفين، فإن :

$$\kappa_1 = \mu_1'$$
$$\kappa_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \sigma^2$$

$$\kappa_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_1\,\mu'_2 + 2\,(\mu'_1)^3$$

$$\kappa_4 = \mu'_4 - 3\,(\mu'_2)^2 - 4\,(\mu'_1)(\mu'_3) + 12\,(\mu'_1)^2\,(\mu_2) - 6\,(\mu'_1)^4,$$

وهكذا ..

كذلك فإنه يمكننا إيجاد العلاقة بين العزوم والتجمعات كالآتي :

نعلم أن :

$$K_X(t) = \ln\left[M_X(t)\right]$$

لذلك فإن :

$$M_X(t) = \exp\left[K_X(t)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!}\,\mu'_r = 1 + \kappa_X(t) + \frac{1}{2!}\left[\,\kappa_X(t)\right]^2 + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left[\,\kappa_X(t)\,\right]^r}{r!}$$

وبمقارنة معاملات $\frac{t^r}{r!}$ في الطرفين، فإن :

$$\mu'_1 = \kappa_1$$

$$\mu'_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2$$

$$\mu'_3 = \kappa_3 + 3\,\kappa_1\,\kappa_2 + \kappa_1^3$$

$$\mu'_4 = \kappa_4 + 3\,\kappa_2^2 + 4\,\kappa_1\,\kappa_3 + 6\,\kappa_1^2\,\kappa_2 + \kappa_1^4$$

وأخيراً، فإنه يمكن كتابة التجمعات بدلالة العزوم المركزية كالآتي :

$$\kappa_1 = \mu'_1$$

$$\kappa_2 = \mu_2 = \sigma^2$$

$$\kappa_3 = \mu_3$$

$$\kappa_4 = \mu_4 - 3\,\mu_2^2$$

وهكذا ..

مثال (5.10) : أوجد التجمع من رتبة r لقانون بواسون للاحتمالات.

الحل : دالة توليد العزوم لقانون بواسون للاحتمالات هي :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx}\, p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \left[e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda (e^t - 1)}$$

لذلك فإن دالة التجمعات المقابلة لقانون بواسون هي :

$$\mathcal{K}_X(t) = \ln[M_X(t)] = \ln\left[e^{\lambda (e^t - 1)}\right] = \lambda (e^t - 1) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{t^r}{r!}\right) \lambda$$

فيكون التجمع من رتبة r هو $\kappa_r = \lambda$ ، لجميع قيم r.

مثال (5.11) : دالة توليد العزوم لمجموع متغيرات عشوائية مستقلة.

إذا كانت X_1 ،... ، X_n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث كانت $M_{X_i}(t)$ هي دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X_i $(i = 1, \ldots, n)$، وكان $Z = X_1 + \ldots + X_n$ ، فإن :

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t). \tag{5.21}$$

البرهان :

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E\left[e^{t(X_1 + \ldots + X_n)}\right]$$

$$= E\left[e^{tX_1} \ldots e^{tX_n}\right]$$

$$= E(e^{tX_1}) \ldots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

لأن دوال المتغيرات العشوائية المستقلة تكون أيضاً مستقلة، وبناء عليه تكون e^{tX_1} ، ... ، e^{tX_n} مستقلة (لأن X_1 ، ... ، X_n مستقلة) كما أن توقع حاصل ضرب الدوال المستقلة يساوي حاصل ضرب توقعات هذه الدوال (سنثبت ذلك في الجزء الثاني من الكتاب).

مثال (5.12) : إذا كان $X_1 \sim \wp(\lambda_1)$، $X_2 \sim \wp(\lambda_2)$ وكان X_1، X_2 مستقلين، وإذا علمت أن $Z = X_1 - X_2$ فاوجد تجمعات Z.

الحل :

$$X_1 \sim \wp(\lambda_1) \Rightarrow M_{X_1}(t) = e^{\lambda_1 (e^t - 1)}$$

$$X_2 \sim \wp(\lambda_2) \Rightarrow M_{X_2}(t) = e^{\lambda_2 (e^t - 1)}$$

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E\left[e^{t(X_1 - X_2)}\right] = E(e^{tX_1})\ E(e^{-tX_2})$$

$$= M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(-t) = e^{\lambda_1 (e^t - 1)}\, e^{\lambda_2 (e^{-t} - 1)}$$

$$= e^{-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}}$$

وتكون دالة التجمعات هي :

$$K_Z(t) = \ln\left[M_Z(t)\right] = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}$$

$$K_Z(t) = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\left[1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right] + \lambda_2\left[1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \dots\right]$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{t}{1!} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{t^2}{2!} + (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{t^3}{3!} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{t^4}{4!} + \dots$$

فتكون التجمعات ذات الرتبة الفردية كلها $(\lambda_1 - \lambda_2)$

والتجمعات ذات الرتبة الزوجية كلها $(\lambda_1 + \lambda_2)$

أي أن :

$$\kappa_m = \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &, m = 2r - 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &, m = 2r \end{cases} \quad , r = 1, , \dots$$

مثال (5.13) : دالـــة توليـــد العزوم لمتغير عشوائي X هي $M_X(t)$، فإذا كان : $Z = a X + b$، حيث a، b ثابتان، $a > 0$ فإن :

$$M_Z(t) = e^{bt}\, M_X(a\,t) \qquad (5.22)$$

وبصفـــة خاصـــة، إذا كـــان : $a = \frac{1}{\sigma}$، $b = -\frac{\mu}{\sigma}$ ، حيث μ، σ همـــا المتوسط

والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، فإن : $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ وتكون دالة توزيع العزوم لهذا المتغير المعياري هي :

$$M_Z(t)=e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) \qquad (5.23)$$

البرهان : $M_Z(t)=E(e^{tZ})=E\left[e^{t(aX+b)}\right]=e^{tb}\,M_X(a\,t)$.

وبصفة خاصة، عندما $a=\frac{1}{\sigma}$، $b=-\frac{\mu}{\sigma}$، فإن $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$، وتكون

$$M_Z(t)=e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

مثال (5.14): إذا كان $X\sim N(3,4)$، وكان $Z=\frac{(X-3)}{2}$، فاثبت أن $Z\sim N(0,1)$

البرهان : [من مثال iii- (5.1)] $\quad X\sim N(3,4)\Rightarrow M_X(t)=e^{3t+2t^2}$

فتكون :

$$M_Z(t)=E\,e^{t\left[\frac{X-3}{2}\right]}=e^{-\frac{3t}{2}}M_X\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=e^{-\frac{3t}{2}}\,e^{\frac{3t}{2}+\frac{t^2}{2}}=e^{t^2/2}$$

وهذه دالة توليد عزوم لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع المعتدل بمتوســط $\mu=0$ ، وتباين $\sigma^2=1$ ، لذلك فإن : $Z\sim N(0,1)$.

مثال (5.15) : يخضع المتغير العشوائي X لقانون اللوغاريتم المعتدل بالبارامترين μ ، σ^2، أي أن $X\sim\wedge(\mu,\sigma^2)$. إثبت أن $E(X)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ ،

$$V(X)=e^{2\mu+\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]$$

الحل : $X\sim\wedge(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Y=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$

لذلك فإن : $E(X)=E(e^Y)$

وبملاحظة أن دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي Y عنـــدما $t = 1$ هي $E(e^Y)$ ،

وأن $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، لذلك فإن $E(X) = E(e^Y) = M_Y(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

وكذلك فإن : $E(X^2) = E(e^{2Y}) = M_Y(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$

$$= e^{2\mu + \sigma^2}\left[e^{\sigma^2} - 1\right] .$$

ويمكن حساب المتوسط $E(X)$ والتباين $V(X)$ لهذا القانون باســتخدام التعريــف المباشر.

(5.2) متباينة ماركوف Markov's Inequality

إذا أخذ المتغير العشوائي قيما غير سالبة فقط، فإنه لأي عدد $a > 0$:

$$P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a} \qquad (5.24)$$

البرهان : سنعطي البرهان هنا في الحالة المتصلة فقــط حيــث يكــون للمتغيــر العشوائي X دالة كثافة احتمالية $f(x)$ (في الحالة المنفصلة يكون البرهان ممـــاثلا باستبدال التكاملات بالمجاميع، واستخدام دالة الكتلة الاحتمالية $p(x)$ بدلا من دالـــة الكثافة الاحتمالية $f(x)$).

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{a} x\, f(x)\, dx + \int_a^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\geq \int_a^{\infty} x\, f(x)\, dx$$ (لأن $\int_0^{a} x\, f(x)\, dx \geq 0$ لجميع قيم a الموجبة)

$$\geq a \int_a^{\infty} f(x)\, dx = a\, P[X \geq a]$$

(5.3) متباينة تشيبيشيف Chebyshev's Inequality

وهي حالة خاصة من متباينة ماركوف، وتنص على أنه إذا خضع المتغير العشوائي X لتوزيع احتمالي μ وتباينة σ^2 ، فإنه لأي عدد موجب k يكون :

$$P\left[\,|X-\mu|\geq k\right]\leq\frac{\sigma^2}{k^2} \qquad (5.25)$$

البرهان : المقدار $(X-\mu)^2$ يمثل متغيراً عشوائياً غير سالب، وبتطبيق متباينة ماركوف (5.24) باستخدام $a=k^2$، فإن :

$$P\left[(X-\mu)^2\geq k^2\right]\leq\frac{E(X-\mu)^2}{k^2}=\frac{\sigma^2}{k^2}$$

ونظراً لأن $(X-\mu)^2\geq k^2$ إذا كان وإذا كان فقط $|X-\mu|\geq k$ ، فإن :

$$P\left[\,|X-\mu|\geq k\,\right]\leq\frac{\sigma^2}{k^2}.$$

ملاحظات :

(1) أهمية متباينتي ماركوف وتشيبيشيف هي في أنهما تسمحان بإيجاد حدود لاحتمالات الأحداث بمعلومية متوسط القانون الاحتمالي فقط (ماركوف) أو معلومية متوسط وتباين هذا القانون (تشيبيشيف)، وبدون معرفة بالقانون الاحتمالي ذاته. فإذا علم القانون الاحتمالي، فإن الاحتمال تحت الاعتبار يمكن حسابه بالضبط ولا نحتاج في هذه الحالة إلى حساب حدود له، أي لا نحتاج إلى أي من المتباينتين.

(2) يمكن استبدال X بأي دالة في المتغير X أو في متغيرات متعددة ويمثل μ في هذه الحالة متوسط هذه الدالة، σ^2 تباينها، فمثلاً إذا استبدلنا X بالمتغير العشوائي $\overline{X}=\frac{\sum_{j=1}^{n}X_j}{n}$ ، فإن $E(\overline{X})=\mu$ ، $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ ، وتصبح متباينة تشيبيشيف على الصورة :

$$P\left[\,|\overline{X}-\mu|\geq k\,\right]\leq\frac{\sigma^2}{n\,k^2}\ .$$

وعلى وجه العموم، إذا كانت $\hat{\theta}$ دالة في X_1، ...، X_n وكان $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta})$ ، $\sigma^2_{\hat{\theta}} = V(\hat{\theta})$، فإن متباينة تشيبيشيف تصبح على الصورة :

$$P\left[\left| \hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}} \right| \geq k \right] \leq \frac{\sigma^2_{\hat{\theta}}}{k^2} .$$

والمتباينة الأخيرة لها أهميتها في إثبات أن $\hat{\theta}$ "مقدر متسق" أي 'consistent estimator' لبارامتر θ من عدمه (يأتي ذكر ذلك في أحد كتب الإحصاء).

(3) متباينة تشيبيشيف (5.25) تأخذ صوراً أخرى، فمثلاً عندما يعكس اتجاه المتباينات :

$$P\left[| X - \mu | \leq k \right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} . \qquad (5.26)$$

وعندما $k = c\,\sigma$ ، فإنه لقيم c الموجبة يكون :

$$P\left[| X - \mu | \geq c\,\sigma \right] \leq \frac{1}{c^2} . \qquad (5.27)$$

أو

$$P\left[| X - \mu | \leq c\,\sigma \right] \geq 1 - \frac{1}{c^2} . \qquad (5.28)$$

وهي تكافئ المتباينة :

$$P\left[\mu - c\,\sigma \leq X \leq \mu + c\,\sigma \right] \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

وهذا يعني أن X تأخذ قيمة على بعد c وحدة انحراف معياري من المتوسط μ باحتمال قيمته على الأقل $1 - \frac{1}{c^2}$.

فمثلاً تأخذ X قيمة على بعد وحدتي انحراف معياري من المتوسط μ (أي $c = 2$) باحتمال قيمته على الأقل $\frac{3}{4}$ (أي أنه عندما $c = 2$، فإن احتمال أن X تأخذ قيمة

في الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ هو على الأقل $\frac{3}{4}$، إذ أن متباينة تشيبيشيف تأخذ الصورة :

$$P[\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma] \geq \frac{3}{4}$$

وبالمثل تأخذ X قيمة على بعد ثلاث وحدات انحراف معياري من المتوسط μ (أي $c = 3$) باحتمال قيمته على الأقل $\frac{8}{9}$.

وتأخذ X قيمة على بعد خمس وحدات انحراف معياري من المتوسط μ (أي $c = 5$) باحتمال قيمته على الأقل $\frac{24}{25}$، وهكذا.

بهذا المفهوم فإن σ تتحكم في انتشار أو تشتت توزيع متغير عشوائي.

مثال (5.16) : يخضع المتغير العشوائي X لقانون بيتا للاحتمالات بالبارامترين $(\alpha = 4, \beta = 3)$. أوجد احتمال أن يأخذ X قيمة على بعد وحدتي انحراف معياري من المتوسط وقارن هذه النتيجة بالحد الأدنى الناتج عن تطبيق متباينة تشيبيشيف.

الحل :

$$X \sim \text{beta}(\alpha = 4, \beta = 3) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 60\, x^3 (1 - x)^2 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = 60 \int_0^1 x^4 (1 - x)^2\, dx$$

$$= (60) \frac{\Gamma(5)\,\Gamma(3)}{\Gamma(8)} = \frac{(60)\,\Gamma(3)}{7.6.5} = \frac{4}{7}$$

$$E(X^2) = 60 \int_0^1 x^5 (1 - x)^2\, dx = (60) \frac{\Gamma(6)\,\Gamma(3)}{\Gamma(9)}$$

$$= \frac{(60)\,\Gamma(3)}{8.7.6} = \frac{5}{14}$$

لذلك فإن :

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E\,X)^2 = \frac{5}{14} - \frac{16}{49} = \frac{3}{98}$$

احتمال أن يأخذ X قيمة على بعد وحدتي انحراف معياري من المتوسط هو :

$$P[\ \mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma\ ] = \int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} f(x)\, d x$$

حيث

$$\mu + 2\sigma = \frac{4}{7} + 2\sqrt{\frac{3}{98}} \cong 0.9213$$

$$\mu - 2\sigma = \frac{4}{7} - 2\sqrt{\frac{3}{98}} \cong 0.2215$$

ودالة الكثافة الاحتمالية f(x) لقانون بيتا بالبارامترين $(\alpha = 4 , \beta = 3)$ هي :

$$f(x) = 60\, x^3\, (1 - x)^2 \quad , \; 0 < x < 1$$

لذلك فإن الاحتمال المطلوب (أن يأخذ X قيمة على بعد وحدتي انحراف معياري من المتوسط) هو :

$$P[\ 0.2215 \le X \le 0.9213\ ] = \int_{0.2215}^{0.9213} 60\, x^3\, (1 - x)^2\, d x$$

$$= 60 \int_{0.2215}^{0.9213} \left[x^3 - 2 x^4 + x^5 \right] d x$$

$$= 60 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{6} x^6 \right]_{0.2215}^{0.9213} = 0.8783 .$$

وبالمقارنة بالحد الأدنى لمتباينة تشيبيشيف وهو 0.75، فإننا نلاحظ أن القيمة المضبوطة للاحتمال المطلوب تزيد عن هذا الحد الأدنى بحوالي 0.1283.

(الحد الأدنى لمتباينة تشيبيشيف هو 0.75 لأن :

$$(\ P[\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma\ ] \ge 1 - \frac{1}{4} = 0.75 .$$

مثال (5.17) : إذا خضع المتغير العشوائي X لقانون ذات الحدين للاحتمالات بالبارامترين (n, p) حيث n عدد صحيح موجب معلوم، فاثبت أنه

بإيجاد المشتقة الأولى للعزم المركزي μ_r من رتبة r بالنسبة إلى p،

فإن : $\mu_r = p\,q\left[n\,r\,\mu_{r-1} + \dfrac{d\,\mu_r}{d\,p}\right], r = 1, 2, \ldots$

ومن ذلك أوجد العزوم المركزية حتى μ_4 .

الحل :

$$\mu_r = E(X - n\,p)^r = \sum_{x=0}^{n}(x - n\,p)^r \cdot \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x}$$

باعتبار أن n عدد معلوم، فإن :

$$\frac{d\,\mu_r}{d\,p} = \sum_{x=0}^{n}\Bigg[r\,(x - n\,p)^{r-1}\,(-n)\binom{n}{x}p^x\,q^{n-x} + $$

$$+ (x - n\,p)^r \cdot \binom{n}{x} x\,p^{x-1}\,q^{n-x}$$

$$+ (x - n\,p)^r \cdot \binom{n}{x} p^x\,(n - x)\,q^{n-x-1}\,(-1)\Bigg]$$

$$= -n\,r\sum_{x=0}^{n}(x - n\,p)^{r-1}\binom{n}{x}p^x\,q^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{n}(x - n\,p)^r\binom{n}{x}p^{x-1}\,q^{n-x-1}\,[\,x\,q - (n - x)\,p\,]$$

$$= -n\,r\,\mu_{r-1} + \frac{1}{p\,q}\sum_{x=0}^{n}(x - n\,p)^{r+1}\binom{n}{x}p^{x-1}\,q^{n-x-1} \cdot p\,q$$

(لاحظ أن $x\,q - (\,n - x\,) = x - n\,p$ ، لأن $q = 1 - p$)

$$= -n\,r\,\mu_{r-1} + \frac{1}{p\,q}\,\mu_{r+1}$$

$$\Rightarrow \mu_{r+1} = p\,q\left[\,n\,r\,\mu_{r-1} + \frac{d\,\mu_r}{d\,p}\right], r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = p\,q\left[\,n\,\mu_0 + \frac{d\,\mu_1}{d\,p}\right] = n\,p\,q = V(X)$$

$$\mu_3 = p\,q\left[2\,n\,\mu_1 + \frac{d\,\mu_2}{d\,p}\right] = p\,q\left(n\,p(-1) + n\,q\right)$$

$$\mu_3 = n\,p\,q\,(q - p)$$

$$\mu_4 = p\,q\left[3\,n\,\mu_2 + \frac{d\,\mu_3}{d\,p}\right]$$

$$= p\,q\left[3\,n^2\,p\,q + n\left\{(q - p)^2 - 2\,p\,q\right\}\right]$$

$$= n\,p\,q\left[(q - p)^2 + (3\,n - 2)\,p\,q\right]$$

وهكذا.

مثال (5.18) : إذا مثلت $f(x;\theta)$ دالة كثافة احتمالية، فاثبت باشتقاق المتطابقة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,d\,x = 1$ بالنسبة إلى θ أن $E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right) = 0$ ، ثم باشتقاقها مرة أخرى بالنسبة إلى θ أن: $E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2$.

الحل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,d\,x = 1$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)d\,x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right) f\,d\,x = E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) f\right] d\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 f + \left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) f\right] d\,x$$

$$= E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 + E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2$$

مثال (5.19) : إذا كان $X\sim gamma(\alpha,\beta)$ ، فاثبت مستخدماً نتائج مثال (5.18) أن :

$E(X)=\alpha\,\beta \quad , V(X)=\alpha\,\beta^2$ ، α عدد حقيقي موجب معلوم

ثم احسب $P[\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma]$ وقارنه بالحد الأدنى لمتباينة تشيبيشيف عندما $\alpha=\frac{32}{3}$ ، $\beta=\frac{3}{56}$.

الحل :

$$X\sim gamma\,(\alpha,\beta) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\,x^{\alpha-1}\,e^{-x/\beta} \quad , x>0$$

$$\ln f=-\ln\Gamma(\alpha)-\alpha\ln\beta+(\alpha-1)\ln x-\frac{x}{\beta}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{x}{\beta^2}\Rightarrow 0=E\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\beta}\right)=E\left(-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{X}{\beta^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mu=E(X)=\alpha\,\beta$$

ويصبح المتوسط عندما $\alpha=\frac{32}{3}$ ، $\beta=\frac{3}{56}$ هو $\mu=\frac{4}{7}$.

$$\frac{\partial^2\ln f}{\partial\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{2x}{\beta^3}\ ,\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\beta}\right)^2=\left(-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{x}{\beta^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0=E\left(\frac{\partial^2\ln f}{\partial\beta^2}\right)+E\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\beta}\right)^2$$

$$=E\left(\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{2X}{\beta^3}\right)+E\left(-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{X}{\beta^2}\right)^2$$

$$=\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{2}{\beta^3}E(X)+E\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{2\alpha X}{\beta^3}+\frac{X^2}{\beta^4}\right]$$

$$\Rightarrow 0=\alpha\,\beta^2-2\beta\,E(X)+\alpha^2\beta^2-2\alpha\,\beta\,E(X)+E(X^2)$$

$$0 = \alpha \beta^2 - 2\beta(\alpha\beta) + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + E(X^2)$$

$$\Rightarrow E(X^2) = +\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2 .$$

ويصبح الانحراف المعياري عندما $\alpha = \frac{32}{3}$ ، $\beta = \frac{3}{56}$ هو $\sigma = \sqrt{\frac{3}{98}}$ ،

والاحتمال المطلوب حسابه هو :

$$P[\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma] = P\left[\frac{4}{7} - \sqrt{\frac{3}{98}} < X < \frac{4}{7} + \sqrt{\frac{3}{98}}\right]$$

$$= P[0.22 \le X \le 0.92] = \int_{0.22}^{0.92} f(x)\,dx$$

$$= 60\int_{0.22}^{0.92} x^3\left(1 - x^2\right)dx = 60\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_{0.22}^{0.92} = 0.967$$

وبتطبيق متباينة تشيبيشيف يكون :

$$P[\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma] \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75 .$$

والفرق واضح بين القول بأن الاحتمال هو 0.967، والاحتمال هو على الأقل 0.75، إذ أن العبارة الأولى أقوى بكثير من العبارة الثانية.

تمـــارين (5)

إحسب توقع X (المتوسط) وتباين X لكل من القوانين الاحتمالية من (1) إلى (11)

(1) $$f(x)=\begin{cases} 1-|1-x| &, 0<x<2 \\ 0 &, \text{e.w.} \end{cases}$$

(2) $$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1}$$

(3) $$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

(4) $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2} &, x>0 \\ 0 &, \text{e.w.} \end{cases}$$

(5) $$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} &, x=0, \\ \frac{2}{3} &, x=1, \\ 0 &, \text{e. w.} \end{cases}$$

(6) $$p(x)=\begin{cases} \binom{6}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{6-x} &, x=0,1,\ldots,6, \\ 0 &, \text{e.w.} \end{cases}$$

(7) $$p(x)=\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} &, x=1,2,\ldots, \\ 0 &, \text{e.w.} \end{cases}$$

(8) $$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{8}{x}\binom{6}{6-x}}{\binom{14}{x}} & , x = 0, 1, \dots, 6, \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

(9) $$p(x) = \begin{cases} e^{-2}\dfrac{2^x}{x!} & , x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

(10) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^2 & , 0 \le x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

(11) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \sqrt{x} & , 0 \le x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

(12) إثبت أنه إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن :

$$E(X-\mu)^n = \begin{cases} 0 & , n = 1, 3, 5, \dots \\ 1.3.5\dots(n-1)\,\sigma^n & , n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

(13) إذا علمت أن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln 3)\, x} & , 1 < x < 3, \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

(أ) أوجد قيمة كل من : $E(X)$ ، $E(X^2)$ ، $E(X^3)$

(ب) استخدام النتائج في (أ) في إيجاد قيمة : $E(X^3 + 2X^2 - 3x + 1)$

(14) إذا علمت أن دالة الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي X هي :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{125} & , x = 0 , \\ \frac{12}{125} & , x = 1 , \\ \frac{48}{125} & , x = 2 , \\ \frac{64}{125} & , x = 3 , \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

فاحسب $E(X)$، $V(X)$، $M_X(t)$.

(15) إذا كان ربح مقاول متغيرا عشوائيا متصلا، كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+1) & , -1 < x < 5 , \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

حيث تقدر الوحدات بآلاف الجنيهات، فما هو الربح المتوقع للمقاول؟

(16) إذا كان احتمال أن يبيع السيد عبد الله قطعة أرض خاصة به بربح وقدره 6 آلاف جنيه هو 0.15، وأن يبيعها بربح وقدره أربعة آلاف وخمسمائة جنيه هو 0.35، وأن يبيعها بلا ربح ولا خسارة هو 0.35 وأن يبيعها بخسارة وقدرها ألفي جنيه هو 0.15، فما هو الربح الذي يتوقعه السيد عبد الله من بيعه لقطعة أرضه؟

أوجد القيمة المتوقعة والتباين لمتغير عشوائي يخضع لكل من القوانين الاحتمالية (17) ـ (23)

(17) قانون بواسون بالبارامتر λ .

(18) القانون الهندسي للاحتمالات بالبارامتر p.

(19) القانون فوق الهندسي للاحتمالات بالبارامترات (N, n, p).

(20) قانون ذات الحدين السالب للاحتمالات بالبارامترين (r, p).

(21) القانون الاحتمالي المنتظم المتصل على الفترة (a, b).

(22) قانون جاما للاحتمالات بالبارامترين (α, β).

(23) قانون بيتا بالبارامترين (α , β).

أوجد دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي X يخضع لكل من القوانين الاحتمالية :

(24) قانون ذات الحدين للاحتمالات (n, p).

(25) قانون بواسون بالبارامتر λ .

(26) القانون الهندسي بالبارامتر p.

(27) قانون ذات الحدين السالب بالبارامترين (r, p).

(28) القانون الاحتمالي المنتظم المتصل على الفترة (a, b).

(29) قانون جاما بالبارامترين (α , β).

(30) إثبت أنه لأي متغير عشوائي X (يوجد له توقع)، يكون $\mu_0 = 1$، $\mu_1 = 0$.

(31) أكتب صيغة لكل من العزمين المركزيين من الرتبتين 4، 6 بدلالة العزوم غير المركزية.

(32) يقاس مدى تماثل توزيع من عدمه بمقياس يسمى **معامل الالتواء** (coefficient of skewness) ويرمز له بالرمز α_3 ، حيث :

$$\alpha_3 = \mu_3 / \sigma^3 ,$$

μ_3 هو العزم الثالث المركزي، σ الانحراف المعياري.

كما يقاس مدى تدبب من فرطحة توزيع بمقياس يسمى **معامل التفرطح** (coefficient of kurtosis)، ويرمز له بالرمز α_4 حيث :

$$\alpha_4 = \mu_4 / \sigma^4 \quad ,$$

حيث μ_4 هو العزم الرابع المركزي.

إثبت أنه إذا خضع X لقانون برنوللي للاحتمالات بالبارامتر p، فإن :

$$\alpha_3 = \frac{1-2p}{\sqrt{pq}} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1-3pq}{pq}$$

(33) استخدم النتيجة التي تحصل عليها في السؤال (23) من هذه التمارين في كتابة البارامترين α ، β بدلالة المتوسط μ والتباين σ^2 لقانون بيتا (α , β) على الصورة :

$$\alpha = \mu\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right] \quad , \quad \beta = (1-\mu)\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right]$$

(34) استخدم دالة توليد العزوم للقانون المعتدل $N(\mu , \sigma^2)$ في إثبات أن $\alpha_3 = 0$ ، $\alpha_4 = 3$ حيث يمثل α_3 ، α_4 معاملي الالتواء والتفرطح على الترتيب.

(35) إثبت أن معامل الالتواء α_3 لقانون ذات الحدين بالبارامترين (n, p) هو : $\alpha_3 = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$ ، ثم بين ما يمكن استنتاجه عن معامل الالتواء α_3 عندما (i) $p = \frac{1}{2}$، (ii) n كبيرة.

(36) بإيجاد المشتقة الأولى، للعزم المركزي من رتبة r، بالنسبة إلى بارامتر التوزيع، فإنه يمكن الحصول على علاقة تتابعية للعزوم المركزية، فمثلاً، بإيجاد المشتقة الأولى بالنسبة إلى λ للعزم المركزي من رتبة r لقانون بواسون، المعطى بالعلاقة :

$$\mu_r = E(X-\lambda)^r = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^r e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} ,$$

إثبت أن : $\mu_{r+1} = \lambda \left[r\, \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\lambda} \right] , r = 1, 2, 3, \ldots$

ثم استخدم الصيغة التتابعية الناتجة وحقيقة أن : $\mu_0 = 1$ ، $\mu_1 = 0$ في إيجاد μ_2 ، μ_3 ، μ_4 ثم تحقيق أن معامل التواء قانون بواسون بالبارامتر λ هو : $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

(37) (أ) إذا كان : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، حيث σ معلومة، فإنه بإيجاد المشتقة الأولى بالنسبة إلى μ للعزم المركزي من رتبة r المعطى بالعلاقة :

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

إثبت أن : $\mu_{r+1} = \sigma^2 \left[r\, \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\mu} \right] , r = 1, 2, \ldots$

(ب) استخدم الصيغة التتابعية في (أ) وحقيقة أن : $\mu_0 = 1$ ، $\mu_1 = 0$ ، في إيجاد النتيجة التي حصلت عليها في المسألة (12) من هذا التمرين.

(38) يخضع المتغير العشوائي X لقانون احتمالي بحيث أن : $E(X) = 3$ ، $E(X^2) = 13$. استخدم متباينة تشيبيشوف في إيجاد الحد الأدنى للاحتمال $P[-2 < X < 8]$.

(39) يخضع المتغير العشوائي X لدالة الكتلة الاحتمالية المقابلة. إحسب $P\left[|X-\mu| \le 2\sigma\right]$ وقارنه بالحد الأدنى لمتباينة تشيبيشيف.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , x = -1 \\ \frac{6}{8} & , x = 0 \\ \frac{1}{8} & , x = 1 \\ 0 & , e.\ w. \end{cases}$$

(40) إذا كان X متغيرا عشوائياً متوسطة $E(X) = \mu$ بحيث أن :

$P[X \le 0] = 0$ ، فاثبت أن : $P[X > 2\mu] \le \frac{1}{2}$.

(41) الفترة الزمنية التي يقضيها أحد الأشخاص انتظاراً لخدمته في إحدى الكافتريات يمكن اعتبارها متغيرا عشوائيا يخضع للقانون الاحتمالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & , x > 0 , \\ 0 & , e. w. \end{cases}$$

(أ) أوجد متوسط وتباين القانون (μ, σ^2)، ثم استخدمهما في حساب :

$$P\left[| X - \mu | \le (1.5)\sigma^2 \right]$$

(ب) استخدم متباينة تشيبيشوف في إيجاد الحد الأدنى للاحتمال المعطى في (أ) وبين معنى النتيجة التي تحصل عليها بشأن الفترة الزمنية اللازمة انتظاراً للخدمة.

(42) يمكن اعتبار وثائق الزواج الصادرة في شهر يولية في إحدى المدن متغيراً عشوائياً متوسطه هو $\mu = 124$ وانحرافه المعياري هو $\sigma = 7.5$. باستخدام متباينة تشيبيشوف ما هو الحد الأدنى لاحتمال صدور عدد من وثائق الزواج يتراوح بين 64، 148 في شهر يولية؟

(43) في دراسة للقيمة الغذائية لأحد أنواع الخبز، وجد أن كمية الثيامين (فيتامين B_1) في شريحة من شرائح هذا الخبز يمكن اعتبارها متغيرا عشوائيا متوسطه $\mu = 0.26$ ميلليجرام وانحرافه المعياري $\sigma = 7.5$ ميلليجرام. طبقا لمتباينة تشيبيشوف ما هما الحدان اللذان يجب أن يقع بينهما محتوى الثيامين في :

(أ) على الأقل $\frac{35}{36}$ من جميع شرائح الخبز.

(ب) على الأقل $\frac{143}{144}$ من جميع شرائح الخبز.

(44) إفرض أن كلا من $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية وأن :

$$f(x) = p\, f_1(x) + (1 - p)\, f_2(x) \quad , \quad 0 \le p \le 1 .$$

(أ) إثبت أن $f(x)$ تمثل كثافة احتمالية.

(ب) أوجد متوسط وتباين $f(x)$ بدلالة متوسطي وتبايني $f_1(x)$ ، $f_2(x)$.

(جـ) أوجد دالة توليد عزوم $f(x)$ بدلالة دالتي توليد عزوم $f_1(x)$ ، $f_2(x)$.

(45) إثبت أنه إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ قيما موجبة فقط، وكان $E(X) = \mu < \infty$ ، فإنه لأي عدد حقيقي $k \ge 1$ ، يكون $P[X \le k\,\mu] \ge 1 - \frac{1}{k^2}$.

(46) ما هي أقل قيمة للعدد k في متباينة تشيبيشوف بحيث يكون احتمال أن يأخذ متغير عشوائي قيمة بين $\mu - k\,\sigma$ ، $\mu + k\,\sigma$ هو : (i) على الأقل 0.95، (ii) على الأقل 0.99.

(47) اعتبر دالة توليد التجمعات $K_X(t) = \ln\left[\, M_X(t)\, \right]$. اثبت أن التجمعات

$$\kappa_1 = K_X^{(1)}(0) = \mu_1'$$
$$\kappa_2 = K_X^{(2)}(0) = \sigma^2$$
$$\kappa_3 = K_X^{(3)}(0) = \mu_3' - 3\,\mu_1'\,\mu_2' + 2\,\mu_1'^3 .$$

(48) من المعلوم أنه مثلث $p(x;\theta)$ دالة كتلة احتمالية لمتغير عشوائي X يعتمد على بارامتر θ ، فإن $\sum_x p(x;\theta) = 1$. فإذا أوجدنا المشتقة الأولى لطرفي هذه المتطابقة بالنسبة إلى θ ، فإنه يمكننا الحصول على متوسط القانون

الاحتمالي وبإيجاد المشتقة الثانية بالنسبة إلى θ فإنه يمكننا الحصول على التباين.

بأخذ المشتقة الأولى والثانية بالنسبة إلى p لطرفي المتطابقة :

$\sum_{x=1}^{\infty} p\, q^{x-1} = 1$ ، إثبت أن متوسط وتباين القانون الهندسي للاحتمالات هما $\mu = \frac{1}{p}$ ، $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$.

(49) بإيجاد المشتقة الأولى والثانية لطرفي المتطابقة الآتية بالنسبة إلى β :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}\, dx = 1 ,$$

إثبت أن متوسط وتباين قانون جاما للاحتمالات بالبارامترين (α, β) هما :
$\mu = \alpha\, \beta$ ، $\sigma^2 = \alpha\, \beta^2$.

(50) أوجد دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي Y حيث $Y = X - \lambda$ عندما يخضع X لقانون بواسون بالبارامتر λ ، ثم حقق من ذلك أن تباين X هو $\sigma^2 = \lambda$.

(51) إثبت أنه إذا خضع X لقانون بواسون بالبارامتر λ ، فإن دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي Z حيث $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ تؤول إلى دالة توليد العزوم للتوزيع المعتدل المعياري عندما $\lambda \to \infty$.

(52) إذا خضع المتغير العشوائي X لقانون وايبل للاحتمالات بالبارامترين (α, β) فاثبت أن العزم غير المركزي من رتبة r هو :

$$E(X^r) = \alpha^{-(r/\beta)}\, \Gamma\left(1 + \frac{r}{\beta}\right) , r = 1, 2, 3, ...$$

ومن ذلك فإن العزم غير المركزي من رتبة r للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر α [هو نفسه قانون وايبل بالبارامترين $(\alpha, \beta = 1)$] هو :
$E(X^r) = r!/\alpha^r$ فيكون متوسط وتبيان القانون الأسي للاحتمالات

بالبارامتر α هما : $\mu = 1/\alpha$ ، $\sigma^2 = 1/\alpha^2$ وكذلك فإن العزم المركــزي من رتبة r لقانون رايلي Rayleigh للاحتمالات بالبارامتر α [هو قـــانون وايبل بالبارامترين $[(\alpha, \beta = 2)$ هو : $E(X^r) = \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) \Big/ \alpha^{r/2}$

فيكون متوسط وتباين قانون رايلي للاحتمالات بالبارامتر α هما :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad ، \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ .$$

(53) إذا خضع المتغير العشوائي X لقانون بير من النوع الثاني عشر للاحتمالات ذي الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \ \beta \ x^{\beta - 1} (1 + x^{\beta})^{-\alpha - 1} & , \ x > 0 \ , \\ 0 & , \text{e. w.} \end{cases}$$

فاثبت أن : $E(X^r) = \dfrac{r\,\Gamma\left(\frac{r}{\beta}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{r}{\beta}\right)}{\alpha \ \beta \ \Gamma(\alpha)}, \ r = 1, 2, \ldots$.

حيث $\alpha \ \beta > r$.

الباب السادس

تطبيقات

- نظرية الموثوقية
- سلاسل ماركوف

(6.1) نظرية الموثوقية Reliability Theory

الموثوقية من المواضيع الهامة التي تطبق فيها الاحتمالات والتوزيعات. وتترجم الكلمة تراجم أخرى مثل المأمونية أو الصلاحية وكلها تعني reliability. وفي تقديري أن الموثوقية هي أقرب التراجم للمعنى الفعلي للكلمة، لذلك فنستخدمها دون غيرها في هذا الكتاب.

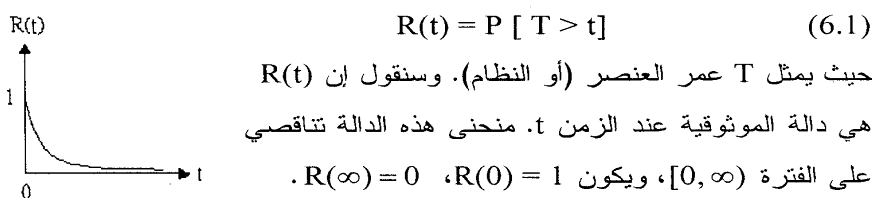
ومن أهم أسباب أهمية الموثوقية أنها تطبق على "الأنظمة" الهندسية كما تطبق على "الأنظمة" البشرية في المجالات الطبية على أساس أن الجسم البشري هو نظام من الضروري دراسته والاهتمام بأحواله.

سنعتبر في دراستنا هذه أن عنصراً من عناصر نظام (أو النظام كله الذي يتكون من هذه العناصر) ظل يعمل من الزمن $t = 0$ حتى تعطل (أي حتى توقف عن العمل أو مات)، فيكون الزمن حتى التعطل أو العمر لهذا العنصر أو النظام، متغيراً عشوائياً متصلاً، سنرمز له بالرمز T، له دالة كثافة احتمالية f_T ، ذلك لأن أزمنة التعطل أو الأعمار تختلف باختلاف العنصر (أو النظام) حتى وإن تطابقت العناصر (أو الأنظمة)، فأعمار الناس متفاوتة على الرغم من تطابق الأنظمة (الأجساد) البشرية.

تعريف (6.1) : موثوقية عنصر (أو نظام) عند الزمن t ـــ والتي سنرمز لها

بالرمز $R(t)$ ــ هي :

$$R(t) = P\,[\,T > t\,] \tag{6.1}$$



حيث يمثل T عمر العنصر (أو النظام). وسنقول إن $R(t)$ هي دالة الموثوقية عند الزمن t. منحنى هذه الدالة تناقصي على الفترة $[0,\infty)$، ويكون $R(0) = 1$، $R(\infty) = 0$.

يقول هذا التعريف إن موثوقية عنصر هي احتمال عدم تعطل العنصر خلال الفترة $[0, t]$، وهو ما يكافئ القول بأن الموثوقية هي احتمال أن العنصر مازال يعمل حتى الزمن t. فإذا كانت موثوقية أحد الأنظمة عند الزمن t_0 هي مثلاً $R(t_0) = 0.95$، فإن هذا يعني أن 95 في المائة تقريباً، من عناصر هذا النظام، ستظل تعمل حتى الزمن t_0 .

ويمكن التعبير عن دالة الموثوقية بدلالة الكثافة الاحتمالية f_T ، ودالة التوزيع F_T للمتغير العشوائي T بالعلاقتين الآتيتين، على الترتيب :

$$R(t) = \int_t^{\infty} f_T(s)\,d s\ , \tag{6.2}$$

$$R(t) = 1 - P\big[\,T \le t\,\big] = 1 - F_T(t)\,. \tag{6.3}$$

وفضلاً عن دالة الموثوقية $R(t)$، فإن دالة أخرى ــ تسمى **دالة معدل التعطل** (failure rate function) ــ تلعب دوراً هاماً في وصف خصائص التعطل.

تعريف (6.2) : تعرف دالة معدل التعطل (تسمى أيضاً دالة المخاطرة hazard function) ونرمز لها بالرمز $h(t)$، بالدالة الآتية :

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R(t)}\,, \tag{6.4}$$

حيث $F_T(t) < 1$.

ولتفسير هذا التعريف، إعتبر الاحتمال المشروط :

$$P[\, t \le T \le t + \Delta t \ | T > t \,] = \frac{P[t < T \le t + \Delta t]}{P[T > t\,]}$$

$$= \frac{1}{R(t)} \int_t^{t+\Delta t} f_T(s)\, ds \ = \frac{f_T(c)\,\Delta t}{R(t)} \ , t \le c \le t + \Delta t .$$

$$\cong h(t)\,\Delta t ,$$

بافتراض أن Δt صغيرة وأن f_T متصلة عند 0^+ .

وهذا يعني أن $h(t)\,\Delta t$ يمثل نسبة العناصر التي ستتعطل في الفترة من t إلى $t + \Delta t$ من بين العناصر التي مازالت تعمل حتى الزمن t.

نظرية (6.1) : إذا كان الزمن إلى التعطل T متغيراً عشوائياً متصلاً ذا كثافة احتمالية f_T وإذا كانت $F_T(0) = 0$ حيث F_T هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي T فإن :

$$f_T(t) = h(t)\, e^{-\int_0^t h(s)\, ds} \ . \qquad (6.5)$$

ويمكن كتابة $f_T(t)$ على الصورة : $f_T(t) = h(t)\, R(t)$ ، حيث

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(s)\, ds} \ . \qquad (6.6)$$

البرهان : $R(t) = 1 - F_T(t) \ \Rightarrow R'(t) = - f_T(t)$

$$h(t) \ = \frac{f(t)}{R(t)} = - \frac{R\,'(t)}{R(t)}$$

بتكامل الطرفين من 0 إلى t

$$\Rightarrow \int_0^t h(s)\, ds \ = - \int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)}\, ds = - \ln R(s)\, \Big|_0^t$$

$$= - \ln R(t) + \ln R(0) = - \ln R(t) \ .$$

ذلك لأن : $R(0) = 1 - F_T(0) = 1$ وهذا يعني أن احتمال التعطل في البداية يساوي صفراً. سنفترض هذا الافتراض في بقية حديثنا عن الموثوقية. لذلك فإن :

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(s)ds}$$

وتكون :

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt}[R(t)] = h(t)\, e^{-\int_0^t h(s)\, ds}$$

ملحوظة : في تعريف (6.2)، تحدد دالة الكثافة الاحتمالية f_T في العلاقة (6.4)، دالة معدل التعطل $h(t)$ بصورة وحيدة، والعكس صحيح ففي نظرية (6.1) تحدد دالة معدل التعطل $h(t)$ في العلاقة (6.5) بصورة وحيدة.

وتوجد علاقة بين دالة الموثوقية R ومتوسط الزمن إلى التعطل الذي نرمز له بالرمز $E(T)$، كما في النظرية الآتية :

نظرية (6.2) : إذا كان $E(T)$ محدوداً، فإن :

$$E(T) = \int_0^\infty R(t)\, dt \qquad (6.7)$$

البرهان :

$$E(T) = \int_0^\infty t f_T(t)\, dt = -\int_0^\infty t\, d[R(t)]$$

وبالتكامل بالتجزيء، فإن :

$$E(T) = -t R(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty R(t)\, dt = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

ذلك لأن : $t R(t)\Big|_0^\infty = 0$ ، فعند الحد الأدنى يكون $t R(t) = 0$، وعند الحد الأعلى يكون :

$$\lim_{t\to\infty}[t R(t)] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t}{e^{\int_0^t h(s)ds}}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{h(t)e^{\int_0^t h(s)ds}}\right] = 0$$

(6.1.1) بعض قوانين التعطل

من الأسئلة الهامة المطروحة في مجال الموثوقية هو ماذا يكون قانون التعطل المعقول الذي يصف الظاهرة المشاهدة، أي ما هي دالة الكثافة الاحتمالية f_T التي تعبر عن هذه الظاهرة عندما يمثل T الزمن إلى التعطل؟

(1) القانون الأسي للتعطل بالبارامتر β

من أهم قوانين التعطل هو القانون الأسي الذي يكون فيه معدل التعطل مقداراً ثابتاً وليكن β، أي أن $h(t)=\beta$ وهذه الخاصية تميز القانون الأسي للاحتمالات دون غيره، كما في النظرية الآتية.

نظرية (6.3) : إذا مثل الزمن إلى التعطل المتغير العشوائي المتصل T الذي يأخذ قيماً غير سالبة، فإن T يخضع للقانون الأسي للاحتمالات إذا كان وإذا كان فقط معدل تعطله ثابت.

البرهان : إذا كان معدل التعطل ثابتاً (β مثلاً)، فإن $h(t)=\beta$ لجميع قيم $t>0$.
وينتج من (6.5) أن :

$$f_T(t)=\beta\, e^{-\beta \int_0^t ds} = \beta\, e^{-\beta t} \quad , t>0$$

أي أن T يخضع للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر β .

وإذا خضع T للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامتر β، فإن دالة التوزيع المقابلة هي :

$$F_T(t)=\int_0^t f_T(s)\, ds = 1-e^{-\beta t} \quad , t>0 .$$

فتكون دالة الموثوقية للقانون الأسي بالبارامتر β هي :

$$R(t)=1-F_T(t)=e^{-\beta t}$$

ودالة معدل التعطل هي :
$$h(t)=\frac{f_T(t)}{R(t)}=\beta$$

ملاحظات :

(1) يفسر افتراض أن معدل التعطل مقداراً ثابتاً (أي اختيار القانون الأسي كنموذج للتعطل) ليعني أنه بعد تشغيل العنصر فإن احتمال تعطله لا يتغير، أي أنه عند استخدام النموذج الأسي للتعطل فإنه يفترض أن "الشيخوخة" لا أثر لها على حياة العنصر، ويقال إن جودة العنصر في هذه الحالة كجودة الجديد.

فعند تشغيل أحد الفيوزات مثلاً، فإن هذا الفيوز يظل يعمل بحالة جيدة كجودة الجديد، حتى يحترق.

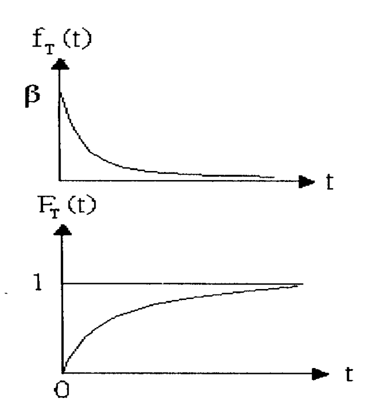
ونلاحظ، في حالة استخدام النموذج الأسي، أن التعطل خلال أي فترة زمنية معينة يعتمد فقط على طول الفترة وليس على التاريخ السابق لهذه الفترة، بينما يؤثر التاريخ السابق على أداء العنصر إذا ما استخدم نموذج آخر غير النموذج الأسي.

(2) أي متغير عشوائي متصل T يأخذ قيماً غير سالبة ويحقق المتطابقة :

$$P[T>s+t\,|\,T>s\,]=P[\,T>t\,]\,,\ t\text{،}s$$ لجميع قيم

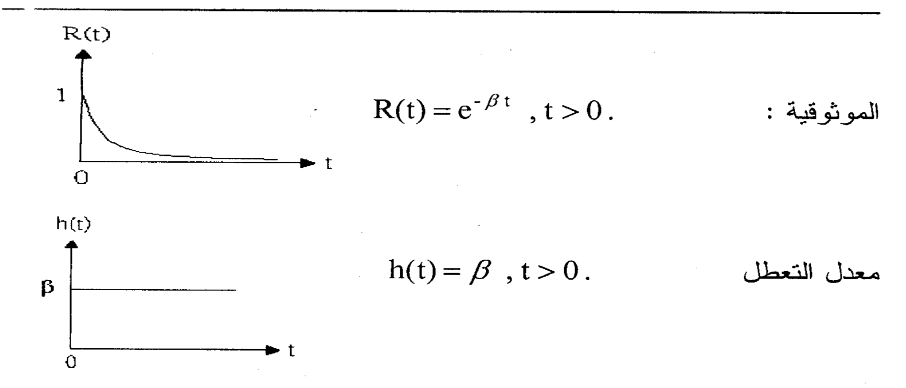
يخضع للقانون الأسي للاحتمالات، والعكس صحيح (أي أنه إذا خضع T للقانون الأسي للاحتمالات فإن هذه المتطابقة تتحقق).

(3) المنحنيات المقابلة لدوال القانون الأسي هي:



الكثافة : $f_T(t)=\beta\, e^{-\beta t}\ \ ,t>0.$

التوزيع : $F_T(t)=1-e^{-\beta t}\ \ ,t>0.$



الموثوقية : $R(t) = e^{-\beta t} \quad , t > 0 .$

معدل التعطل $h(t) = \beta \quad , t > 0 .$

متوسط وتباين القانون الأسي للاحتمالات ذي كثافة $f_T(t) = \beta e^{-\beta t}$ هما، علـــى الترتيب :

$$E(T) = \frac{1}{\beta} \quad , \quad V(T) = \frac{1}{\beta^2}$$

القانون الأسي للتعطل وتوزيع بواسون :

توجد علاقة وثيقة بين القانون الأسي للتعطل وتوزيع بواسون.

نفرض أن التعطل ينتج عن أحداث (اضطرابات) عشوائية وأن X_t يمثل عدد هذه الأحداث في فترة زمنية طولها t، ولنفرض أن $X_t \; (t \geq 0)$ تمثل عملية بواســـون، أي أنه لأي عدد ثابت t، فإن المتغير العشوائي X_t يخـــضع لقـــانون بواســـون بالبارامتر βt . ولنفترض أن التعطل يحدث في خلال الفتـــرة $[0, t]$ إذا وقعت وإذا وقعت فقط إحدى هذه الأحداث.

نفرض أن الزمن إلى التعطل هو المتغير العشوائي المتصل T. فتكون $.F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - P[T > t]$

سيكون $T > t$ إذا وإذا فقط لم يقع أحد الأحداث خلال الفترة [0, t]، ويحدث هذا إذا كان وإذا كان فقط $X_t = 0$. لذلك فإن :

$$F_T(t) = 1 - P[X_t = 0] = 1 - e^{-\beta t} \quad , t > 0 \ .$$

ونلاحظ أن F_T تمثل دالة التوزيع الأسي للتعطل. أي أن الزمن بين حدثين من الأحداث التي تخضع لعملية بواسون هو متغير عشوائي يخضع للقانون الأسي للتعطل.

(i) بافتراض أن الأحداث تخضع لعملية بواسون، وأن احتمال أن الحدث لن يؤدي إلى التعطل هو الثابت p.

سيكون $T > t$، إذا وإذا فقط (خلال الفترة [0 , t]) لم تقع أحداث، أو وقع حدث واحد ولم يؤد إلى تعطل، أو وقع حدثان لم ينتج عنهما تعطل وهكذا. أي أن :

$$F_T(t) = 1 - P[T > t] = 1 - \left[e^{-\beta t} + (\beta t) e^{-\beta t} p + \frac{(\beta t)^2}{2!} e^{-\beta t} p^2 + \ldots \right]$$

$$= 1 - e^{-\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta t p)^j}{j!} = 1 - e^{-\beta t} . e^{\beta t p} = 1 - e^{-\beta (1-p) t}$$

لذلك فإن T يخضع للقانون الأسي للتعطل بالبارامتر $\beta(1-p)$. لاحظ أنه عندما $p = 0$ فإننا نحصل على الحالة التي ناقشناها من قبل.

(ii) بافتراض أن الأحداث تخضع لعملية بواسون، وأن التعطل ينتج إذا وقعت r على الأقل من هذه الأحداث.

سيكون $T > t$ إذا وإذا فقط كان عدد الأحداث الواقع لا يتجاوز (r - 1).

أي أن :

$$F_T(t) = 1 - P[T > t] = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\beta t)^j e^{-\beta t}}{j!}$$

ونعلم من (B.15) في ملحق B أن :

$$1-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(\beta t)^j e^{-\beta t}}{j!}=\int_0^t \frac{\beta^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\beta s}\, ds$$

لذلك فإن :

$$F_T(t)=\int_0^t \frac{\beta^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\beta s}\, ds$$

وهي دالة توزيع جاما بالبارامترين (r, β). وهذا يعني أن سبب التعطل في هذه الحالة يؤدي إلى أن الزمن إلى التعطل يخضع لقانون جاما للتعطل.

لاحظ أنه عندما $r = 1$ فإننا نحصل على القانون الأسي للتعطل.

(2) قانون وايبل للتعطل بالبارامترين $(\beta ، \alpha)$

بدلاً من أن يكون معدل التعطل ثابتاً، إفرض أنه يأخذ الصورة :

$$h(t)=\beta\alpha\, t^{\alpha-1} \quad , t>0 \ , \tag{6.8}$$

حيث α ، β ثابتان موجبان.

نلاحظ من (6.5) في نظرية (6.1) أن :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \beta\alpha\, t^{\alpha-1} e^{-\int_0^t \beta\alpha s^{\alpha-1} ds} \\ &= \beta\alpha\, t^{\alpha-1} e^{-\beta t^{\alpha}} \quad , \ t>0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

يقال للمتغير العشوائي T الذي له الكثافة الاحتمالية (6.9) إنه يخضع لقانون وايبل للاحتمالات.

ويتغير شكل منحنى دالة الكثافة (6.9) بتغير قيمة α (بارامتر شكل) كما في الصورة حيث أخذنا $\alpha = 1, 2, 3$ ، $\beta=1$.

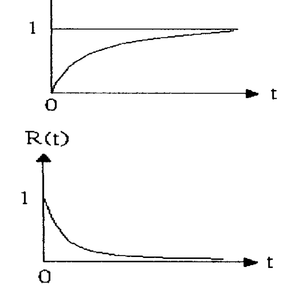
ويعتبر توزيع وايبل نموذجاً مناسباً كقانون للتعطل عندما يتكون النظام من عدد من المكونات حيث يكون التعطل راجعاً في الأساس إلى الانسياب الأكثر حدة من بين

عدد كبير من الانسيابات إلى النظام. وباستخدام توزيع وايبل فإنه يمكننا الحصول على معدل تعطل ثابت أو تزايدي أو تناقصي بالاختيار المناسب للبارامتر α (أنظر صور معدل التعطل).

التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع وايبل، حيث نحصل على الكثافة الأسية بأخذ $\alpha = 1$ في (6.9).

وتقول لنا (6.8) إن معدل تعطل قانون وايبل لا يكون ثابتاً ولكنه متناسباً مع قوى t. فعندما $\alpha = 1$ ، يكون معدل التعطل ثابتاً (الحالة الأسية) وعندما $\alpha = 2$ يكون معدل التعطل خطياً (قانون رايلي Rayleigh)، وعندما $\alpha = 3$ يكون معدل التعطل تربيعياً وهكذا.

الدوال المقابلة لقانون وايبل هي :

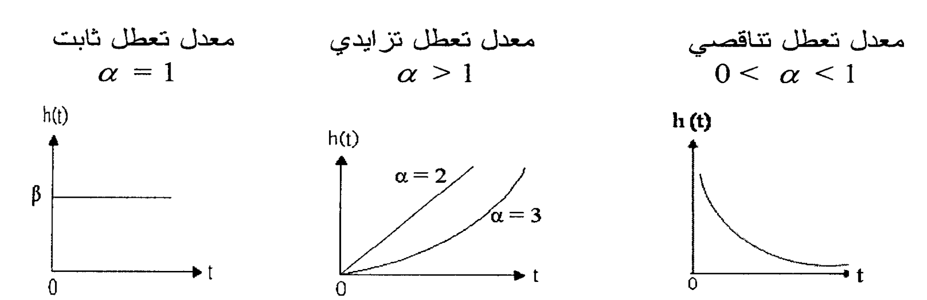


الكثافة : $f_T(t) = \beta\alpha\, t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t^{\alpha}}\ , t > 0.$

التوزيع : $F_T(t) = 1 - e^{-\beta t^{\alpha}}\ , t > 0$

الموثوقية : $R(t) = e^{-\beta t^{\alpha}}\ , t > 0$

معدل التعطل : $h(t) = \beta\alpha\, t^{\alpha-1}\ ,\ t > 0$



متوسط وتباين قانون وايبل للاحتمالات هما :

$$E(T) = \beta^{-1/\alpha}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right), V(T) = \beta^{-2/\alpha}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right].$$

وأخيراً، فإنه من المؤكد أن هناك قوانين تعطل أخرى عديدة غير الأسي ووايبل، إلا أننا ذكرنا في هذا الكتاب اثنين من أهم قوانين التعطل المستخدمة التي تمثل نماذج مقبولة لدراسة خصائص العناصر أو الأنظمة.

(3) القانون المعتدل للتعطل :

توجد عناصر تخضع أزمنة تعطلها للقانون المعتدل $N(\mu\, \sigma^2)$. فإذا مثل T الزمن إلى التعطل فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T تكون على الصورة :

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < t < \infty \qquad (6.10)$$

ونعلم أن الزمن لابد وأن يكون موجباً، إلا أن نطاق القانون المعتدل (قيم t) هـــو جميع القيم الحقيقية الموجبة والسالبة. فلكي نتمكن من تطبيق القانون المعتدل فـــي مجال الموثوقية، فإننا :

(1) إما أن نعتبر أن $P(T < 0)$ مساوية للصفر تقريباً، أو

(2) نقطع الكثافة عند الصفر، أي نجعل المساحة تحت منحنى دالة الكثافة مساوية للواحد لجميع قيم t الموجبة. فنوجد قيمة الثابت A الذي يجعل الدالة

$$g_T(t) = A\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad t > 0 \ ,$$

دالة كثافة احتمالية. أي

$$\begin{aligned} 1 = \int_0^\infty f_T(t)\, dt &= A \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \\ &= A\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= A\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\frac{\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= A\sqrt{2\pi}\, \sigma\, \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

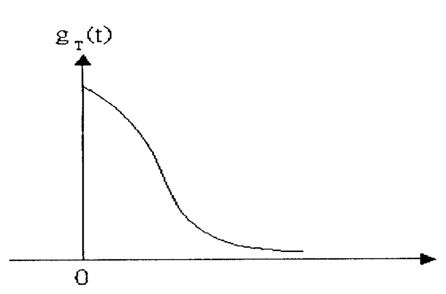
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma\, \Phi(\mu/\sigma)} \quad , \quad \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \ .$$

لذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية للقانون المعتدل المقطوع عند الصفر (truncated normal density at zero) تصبح على الصورة :

$$g_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma\, \Phi(\mu/\sigma)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad t > 0 \ . \qquad (6.11)$$

نطاق هذه الدالة هو قيم t الموجبة، والمساحة تحت منحنى g_T هي الواحد علـــى النطاق $(0, \infty)$.

منحنى دالة الكثافة الاحتمالية $g_T(t)$ للقانون المعتدل المقطوع يأخذ الصورة المبينة في الشكل.



دالة الموثوقية المقابلة لهذه الكثافة سنرمز لها بالرمز $R_g(t)$ تعطى بالعلاقة :

$$R_g(t) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}, \quad t > 0 \ . \qquad (6.12)$$

ويمثلها المنحنى المبين في الشكل ذلك لأن :

$$R_g(t) = \int_t^{\infty} g_T(s)\, ds = A \int_t^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} ds$$

وباستخدام التعويض $x = \frac{s - \mu}{\sigma}$ ، فإن $ds = \sigma\, dx$، وتصبح حدود التكامل $x = \frac{t - \mu}{\sigma}$ عندما $s = t$، $x = \infty$ عندما $s = \infty$. لذلك فإن :

$$R_g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma\, \Phi(\mu / \sigma)} \int_{\frac{t-\mu}{\sigma}}^{\infty} \sigma\, e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= \frac{\left[1 - \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx\right]}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} .$$

$$R_g(t) = \frac{\left[1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)\right]}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} .$$

ملاحظات :

(1) إذا كانت μ كبيرة بالنسبة إلى σ بحيث $3 < \frac{\mu}{\sigma}$، فإنــه يمكــن اعتبــار أن $\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \cong 1$ ، ويمكن استخدام القانون المعتدل العام $N(\mu, \sigma^2)$ ذي الكثافة (6.10) (بدون قطع)، وتكون الموثوقية في هذه الحالة على الصورة :

$$R_f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) . \tag{6.13}$$

(2) يصلح القانون المعتدل للتعطل لأن يكون نموذجاً للعناصر التي يكون تعطلهـا نتيجة الإجهاد (الشيخوخة) وهو لا يعتبر من قوانين التعطل الهامة.

مثال (6.1) : يخضع طول عمر عنصر للتوزيع المعتدل المقطوع عنــد الــصفر بمتوسط 100 ساعة وانحراف معياري 1000 ساعة. ما هي موثوقية العنصر لتشغيله 50 ساعة؟.

الحل : باستخدام (6.12) حيث $\mu = 100$ ، $\sigma = 1000$ ، $t = 50$، فإن :

$$R_g(50) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{50 - 100}{1000}\right)}{\Phi\left(\frac{100}{1000}\right)} = \frac{1 - \Phi(-0.05)}{\Phi(0.1)} = \frac{\Phi(0.05)}{\Phi(0.1)} = \frac{0.5199}{0.5398} = 0.963.$$

وذلك باستخدام جدول (IV) ملحق E.

مثال (6.2) : إذا خضع الزمن إلى التعطل T لعنصر للقانون المعتدل بمتوسط 90 ساعة وانحراف معياري 5 ساعات، فما هو عدد ســاعات تــشغيل العنصر إذا ما أريدت له موثوقية 0.95 ؟ .

الحل : المتوسط $\mu = 90$ كبير بالنسبة إلى الانحراف المعياري $\sigma = 5$، فنستخدم القانون المعتدل للتعطل $N(90, 25)$ ــ بدون قطع ــ الذي تعطي موثوقيته بالعلاقة (6.13). لذلك فإن :

$$0.95 = R_f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - 90}{5}\right)$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{t - 90}{5}\right) = 0.5$$

وباستخدام جدول (IV) في ملحق (E)، فإن :

$$\frac{t - 90}{5} = -1.645 \Rightarrow t = 81.775 \text{ ساعة}$$

مثال (6.3) : يخضع الزمن إلى التعطل T لعنصر للقانون المعتدل $N(\mu, \sigma^2)$ (بدون قطع). فإذا كان الانحراف المعياري $\sigma = 10$ ساعات، وإذا كان للعنصر موثوقية 0.99 لتشغيل العنصر 100 ساعة، فما هو عمر العنصر المتوقع؟

الحل :

$$T \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow R_f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$
$$\Rightarrow 0.99 = R_f(100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - \mu}{10}\right)$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{100 - \mu}{10}\right) = 0.01$$

وباستخدام جدول (IV) في ملحق (E)، فإن :

$$\frac{100 - \mu}{10} = -2.325 \Rightarrow \mu = 100 + 23.25 = 123.25 \text{ ساعة}$$

(6.1.2) موثوقية الأنظمة :

لعله يكون من البديهي أن نطلب معرفة موثوقية النظام إذا علمنا موثوقية عناصره (مكوناته). ويمكن أن تكون هذه مشكلة صعبة الحل، سنناقشها في بعض الحالات البسيطة.

أولاً : التوصيل على التوالي

$\longrightarrow$ A_1 — A_2 $\longrightarrow$

نفرض أن نظاماً يتكون من عنصرين متصلين على التوالي كما في الشكل، وهذا يعني أنه لكي يعمل النظام فلابد لكل من العنصرين أن يعملا، وإذا فرضنا أن كلاً من العنصرين يعمل مستقلاً عن الآخر، واعتبرنا موثوقية النظام هي $R(t)$ وموثوقيتي العنصرين هما $R_1(t)$ ، $R_2(t)$، فإن :

$$R(t) = R_1(t)\, R_2(t) \; .$$

أي أن موثوقية النظام تساوي حاصل ضرب موثوقيتي عنصريه.

ذلك لأنه من التعريف، إذا اعتبرنا أن T هي الزمن إلى التعطل للنظام، فإن :

$$R(t) = P[\, T > t \,] = P[\, T_1 > t \, , T_2 > t \,]$$
$$= P[\, T_1 > t \,]\, P[\, T_2 > t \,] = R_1(t)\, R_2(t)$$

حيث T_1 هو زمن التعطل للعنصر الأول، T_2 زمن التعطل للعنصر الثاني.

لذلك فإن : $R(t) \le \min\{\, R_1(t) \, , R_2(t) \,\}$.

أي أنه لنظام يتكون من عنصرين متصلين على التوالي لا تتجاوز موثوقية النظام أيٍّ من موثوقية عنصريه.

ويمكن تعميم هذه النتيجة إلى n من العناصر كما هو في النظرية الآتية :

نظرية (6.4) : إذا اتصلت n من عناصر $\rightarrow \boxed{A_1} - \boxed{A_2} \cdots \boxed{A_i} \cdots \boxed{A_n} \rightarrow$ نظام ــ تعمل مستقلة عن بعضها ــ على التوالي، وإذا كانت موثوقية العنصر i هي $R_i(t)$ وموثوقية النظام $R(t)$، فإن :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad (6.14)$$

وعندما تتساوى موثوقيات العناصر، أي عندما $R_i(t) = R^*(t)$ لجميع قيم i، فإن :

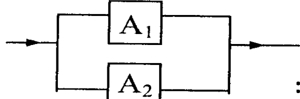
$$R(t) = \left[R^*(t) \right]^n \qquad (6.15)$$

مثال (6.4) : إذا خضعت المتغيرات العشوائية T_1، ...، T_n لقانون وايبل للاحتمالات بالبارامترات (α, β_1)، ...، (α, β_n)، التي تمثل الأزمنة إلى التعطل لعناصر نظام متصلة على التوالي وتعمل مستقلة عن بعضها، فإن موثوقية العنصر i هي : $R_i(t) = e^{-\beta_i t^{\alpha}}$.

لذلك فإن موثوقية النظام من (6.14) هي :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\beta_i t^{\alpha}} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \beta_i t^{\alpha}}$$

لذلك فإن الزمن إلى تعطل النظام يخضع أيضاً لقانون وايبل بالبارامترين $\left(\alpha, \sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)$.



ثانياً : التوصيل على التوازي :

نوع آخر من الأنظمة هو نظام التوصيل على التوازي : الذي تتصل فيه عناصر النظام بحيث يكون تعطله ناتجاً

عن تعطل جميع عناصره. فإذا تكون نظام من عنصرين يعملان مستقلين عن أحدهما الآخر، فإن موثوقية النظام $R(t)$ تعطى بدلالة موثوقيتي عنصريه $R_1(t)$ ، $R_2(t)$ بالعلاقة :

$$R(t)=1-\left[1-R_1(t)\right]\left[1-R_2(t)\right], \tag{6.16}$$

لأن :

$$R(t)=P\left[T>t\right]=1-P\left[T\le t\right]$$
$$=1-P\left[T_1\le t\right]P\left[T_2\le t\right]$$
$$R(t)=1-\left[1-P(T_1>t)\right]\left[1-P(T_2>t)\right]$$
$$=1-\left[1-R_1(t)\right]\left[1-R_2(t)\right]$$

التي يمكن أيضاً كتابتها على الصورة :

$$R(t)=R_1(t)+R_2(t)-R_1(t)R_2(t) \tag{6.17}$$

لذلك فإن : $R(t)=\max\{R_1(t),R_2(t)\}$. أي أن نظاماً يتكون من عنصرين متصلين على التوازي ويعملان مستقلين عن أحدهما الآخر يكون أكثر موثوقية من أي من عنصرية.

ويمكن تعميم هذه النتيجة إلى m من العناصر كما في النظرية الآتية :

نظرية (6.5) : إذا اتصلت m من عناصر نظام ــ تعمل مستقلة عن بعضها ــ على التوازي، وإذا كانت موثوقية العنصر i هي $R_i(t)$ ، $(i=1, 2, \ldots, m)$، وموثوقية النظام $R(t)$، فإن :

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{m}\left[1-R_i(t)\right]. \tag{6.18}$$

في كثير من الأحيان ما تتطابق العناصر من حيث تساوي موثوقياتها أي أن $R_i(t)=R^*(t)$ لجميع قيم i، تصبح في هذه الحالة موثوقية النظام

$$R(t) = 1 - (1 - R^*(t))^m . \qquad (6.19)$$

مثال (6.3) : يتكون نظام من عنصرين متصلين على التوازي ويخضع زمن التعطل لكل منهما للقانون الأسي للاحتمالات بالبارامترين β_1 ، β_2 ، فتكون موثوقية النظام هي :

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)\,R_2(t)$$

$$= e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}$$

ومن الواضح أن توزيع الزمن إلى تعطل النظام T في هذه الحالة لا يكون أسياً. ويمكن الحصول على الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T كالآتي :

$$f_T(t) = -R'(t) = \beta_1\, e^{-\beta_1 t} + \beta_2\, e^{-\beta_2 t} - (\beta_1 + \beta_2)\, e^{-(\beta_1+\beta_2)t} .$$

كذلك يمكن الحصول على متوسط الزمن إلى التعطل بحساب E(T). نعلم من (6.7) أن :

$$E(t) = \int_0^\infty R(t)\,d\,t = \int_0^\infty \left[e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} - e^{-(\beta_1+\beta_2)t}\right] d\,t .$$

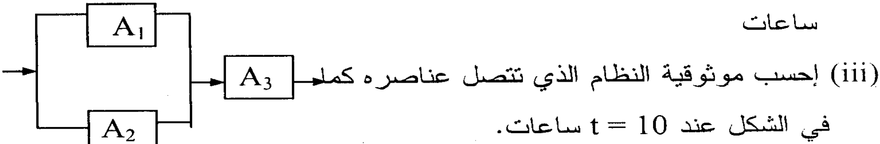
$$= \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2}$$

وعلى الرغم من أنه أحياناً ما يكون التوصيل على التوالي ضرورياً، إلا أنه كثيراً ما يستخدم التوصيل على التوازي لزيادة موثوقية النظام، إذ أن النظام الذي تتصل عناصره على التوالي يكون أقل موثوقية من النظام الذي تتصل عناصره على التوازي، كما يبين المثال الآتي :

مثال (6.4) : نظام يتكون من ثلاثة عناصر لكل منها معدل تعطل ثابت هو $\beta = 0.01$.

(i) إحسب موثوقية النظام إذا كانت عناصره متصلة على التوالي عند $t = 10$ ساعات.

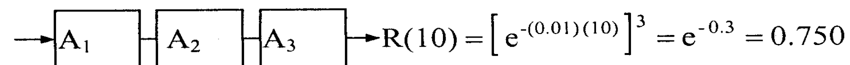
(ii) إحسب موثوقية النظام إذا كانت عناصره متصلة على التوازي عند $t = 10$ ساعات



(iii) إحسب موثوقية النظام الذي تتصل عناصره كما في الشكل عند $t = 10$ ساعات.

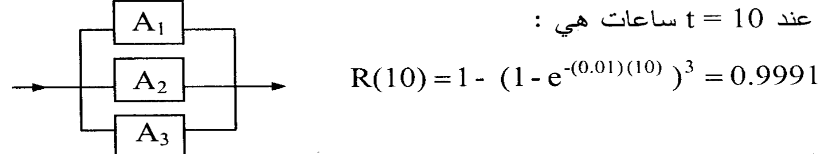
الحل : عندما يكون معدل التعطل ثابتاً، فإن هذا يعني أن الزمن إلى التعطل T يخضع للقانون الأسي للتعطل بالبارامتر $\beta = 0.01$ ، أي أن موثوقية أي عنصر من عناصر النظام عند الزمن t هي $R^*(t) = e^{-(0.01)t}$

(i) باستخدام (6.15) فإن موثوقية النظام إذا كانت عناصره متصلة على التوالي عند $t = 10$ ساعات هي



$$R(10) = \left[e^{-(0.01)(10)} \right]^3 = e^{-0.3} = 0.750$$

(ii) باستخدام (6.19)، فإن موثوقية النظام إذا كانت عناصره متصلة على التوازي عند $t = 10$ ساعات هي :



$$R(10) = 1 - \left(1 - e^{-(0.01)(10)}\right)^3 = 0.9991$$

(iii) العناصر الثلاثة في هذا النظام يتصل اثنان منها على التوازي، ثم يوصل هذين العنصرين على التوالي مع العنصر 3.

A_4 → A_3

لحساب موثوقية هذا النظام فسنعتبر أن العنصر 4 قد حل محل العنصرين 1، 2، فتكون موثوقية العنصر 4 (باستخدام (6.19)) هي :

$$R_4(10) = 1 - \left(1 - e^{-(0.01)(10)}\right)^2 = 0.9909$$

العنصران 4 ,3 متصلان على التوالي، لذلك فإن موثوقية النظام (باستخدام (6.14) حيث $n = 2$) هي :

$$R(10) = R_4\ (10)\ R_3\ (10) = (0.9909)\ (e^{-0.1}) = 0.8966$$

نلاحظ في هذا المثال أن النظام المتصل على التوالي موثوقيته عند $t = 10$ هي 0.750 وهي أدنى الموثوقيات، وموثوقية النظام المتصل على التوازي عند $t = 10$ هي 0.9909 وهي أعلى الموثوقيات. وأم النظام الذي يتصل عنصرين من عناصره على التوازي والثالث معهما على التوالي فإن موثوقيته تقع بين القيمتين 0.750، 0.9909 إذ أنها 0.8966.

وعلى وجه العموم، فإنه لأي t تكون موثوقيات الأنظمة الثلاثة التي اعتبرناها في هذا المثال هي، على الترتيب :

(i) التوالي :

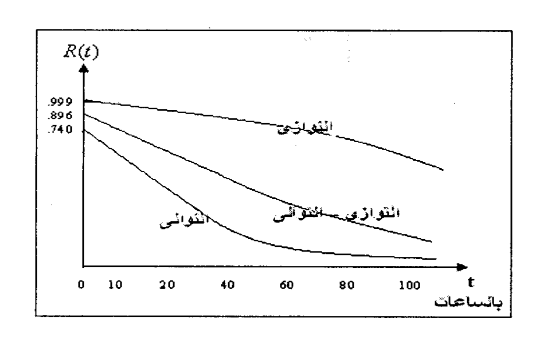
$$R(t) = e^{-0.03\,t}$$

(ii) التوازي :

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-0.01\,t})^3$$

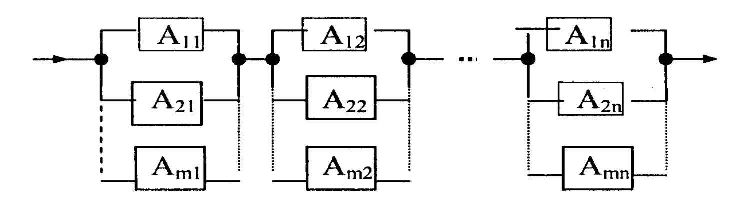
(iii) التوازي ــ التوالي :

$$R(t) = \left[1 - (1 - e^{-0.01\,t})^2\right] e^{-0.01\,t}$$



والشكل يوضح منحنى دالة الموثوقية لكل من الأنظمة الثلاثة.

إعتبرنا في هذا الفصل أبسط أنواع التوصيل وهما التوالي والتوازي، ورأينا في المثال أنه يمكننا استخدام التوصيل على التوالي ثم التوازي، ويمكن تعميم هذا النظام إلى عدد من العناصر مثل النظام المبين في الشكل (i).



(i) التوازي ــ التوالي

(a) نظام التوازي ــ التوالي :

وتحسب موثوقية النظام في هذه الحالة، أولاً بـــإحلال عنـــصر واحـــد محـــل العناصر المتصلة على التوازي كما في الشكل (ii) وحساب موثوقية كل منها على أساس اتصالها على التوازي.

A_1 —— A_2 —— ... —— A_n

(ii) إحلال العناصر المتصلة على التوازي بعنصر واحد

فيحل العنصر A_j محل العناصر المتصلة على التـــوازي A_{1j}، ...، A_{mj} حيـــــث $j = 1, \dots, n$، ثم نحسب موثوقية العنصر A_j باستخدام (6.18). أي أن :

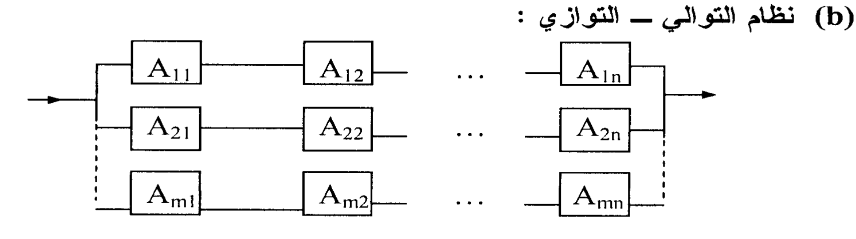
$$R_j(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \left[1 - R_{ij}(t) \right]$$

وثانياً : بحساب موثوقية النظام على أساس أنه يتكون من n من العناصـــر A_1، ...، A_n المتصلة على التوالي وذلك باستخدام (6.14)، فتكون موثوقية النظام هي :

$$R(t) = \prod_{j=1}^{n} R_j(t) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - R_{ij}(t)) \right] , \qquad (6.20)$$

حيث تمثل $R_{ij}(t)$ موثوقية العنصر A_{ij} عند الزمن t.

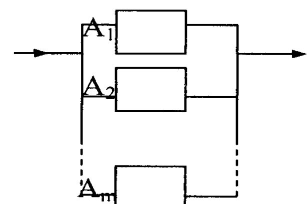
(b) نظام التوالي ــ التوازي :



(iii) التوالي ــ التوازي

يحل في هذه الحالة العنصر A_i محل العناصر المتصلة على التوالي A_{i1} ، ...، A_{in} حيث $i = 1, \ldots, m$ كما في شكل (iv). فتكون موثوقية A_i باستخدام (6.11) هي :

$$R_i(t) = \prod_{j=1}^{n} R_{ij}(t),$$



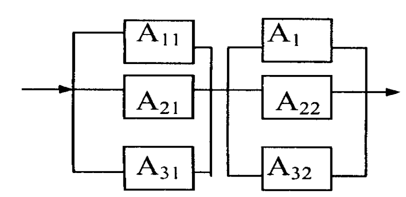
(iv) إحلال العناصر المتصلة على التوالي بعنصر واحد

حيث تمثل $R_{ij}(t)$ موثوقية العنصر A_{ij}.

وتصبح العناصر في شكل (iv) متصلة على التوازي، لذلك فإنه تصبح موثوقية النظام باستخدام (6.18) على الصورة :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - R_i(t))$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \prod_{j=1}^{n} R_{ij}(t)\right). \qquad (6.21)$$



مثال (6.5) : تتصل عناصر نظام كما في الشكل المبين. إذا علمت أن معدل تعطل أي عنصر من عناصر النظام هو $h(t) = 3t^2$ ، فاحسب موثوقية النظام عند $t = \frac{1}{2}$ سنة.

الحل : اتصال عناصر النظام هو من نوع التوازي ــ التوالي، وفي هــذه الحالــة تكون $m = 3$، $n = 2$، وتصبح موثوقية النظام باستخدام (6.20) هي :

$$R(t) = \prod_{j=1}^{2}\left[1 - \prod_{i=1}^{3}(1 - R_{ij}(t))\right].$$

ونظراً لأن عناصر النظام لها نفس معدل التعطل، فيكون لها أيضاً نفس الموثوقية، لذلك فإن :

$$R(t) = \prod_{j=1}^{2}\left[1 - (1 - R^*(t))^3\right]$$
$$= \left[1 - (1 - R^*(t))^3\right]^2 ,$$

حيث $R^*(t)$ هي موثوقية أي عنصر من عناصر النظام.

معدل التعطل $h(t) = 2t^2$ هو على صورة معدل تعطل قانون وايبل بالبارامترين $\beta = 2$ ، α 3 =، فتكون موثوقية أي عنصر (موثوقيــة وايبــل بالبــارامترين $\beta = 2$ ، α 3=) هي :

$$R^*(t) = e^{-2t^3}$$

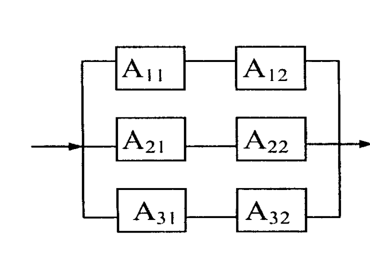
وتكون موثوقية النظام هي :

$$R(t) = \left[1 - (1 - e^{-2t^3})^3\right]^2$$

وعندما $t = \frac{1}{2}$ سنة، فإن :

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - (1 - e^{-0.25})^3\right]^2 = 0.978$$

مثال (6.6) : إذا اتصلت نفس عناصر النظام في مثال (6.5) على التوالي ثم التوازي كما في الشكل، فاحسب موثوقيــة النظام عندما $t = \frac{1}{2}$ سنة، وقارن



بينها وبين موثوقية النظام التي حصلت عليها في مثال (6.5).

الحل : باستخدام (6.21)، فإن موثوقية النظام هي :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{3}\left(1 - \prod_{j=1}^{2} R_{ij}(t)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{3}\left[1 - (R^*(t))^2\right]$$

$$= 1 - \left[1 - (R^*(t))^2\right]^3 = 1 - \left[1 - e^{-4t^3}\right]^3$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left[1 - e^{-0.5}\right]^3 = 0.939.$$

ونلاحظ أن موثوقية نظام التوازي ــ التوالي تكون أعلى من موثوقية نظام التوالي ــ التوازي.

(6.2) سلاسل ماركوف Markov Chains

إعتبر متتابعة من المتغيرات العشوائية X_1، X_2، ... ونكتبها أيضاً على الصورة $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ ، التي يأخذ كل منها القيم 1، 2، ...، M. سنعبر عن X_n بأنه حالة نظام ما عند الزمن n، لذلك فإن النظام سيكون في الحالة i عند الزمن n عندما $X_n = i$.

تعريف (6.3) : سنقول إن متتابعة المتغيرات العشوائية $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ تُكون سلسلة ماركوف إذا كان في كل مرة يكون فيها النظام في الحالة i فإن هناك احتمالاً وقدره p_{ij} بأن ينتقل النظام إلى الحالة j. أي أنه لجميع قيم i_1، ...، i_{n-1}، i، j،

$$P\left[X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_1 = i_1\right] = p_{ij}. \quad (6.22)$$

وتسمى p_{ij} **الاحتمالات الانتقالية** (transition probabilities) لسلسلة ماركوف، وهي عبارة عن الاحتمال المشروط أن سلسلة ماركوف هي في الحالة j عند

الزمـــن n بشرط أن تكون في الحالة i عند الزمن 1 - n. وتحقــق الاحتمـــالات الانتقالية p_{ij} الشرطين الآتيين :

$$(1) \quad p_{ij} \geq 0, \ (i, j = 1, 2, ..., M)$$ لجميع قيم

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1, i = 1, 2, ..., M.$$

من المناسب كتابة الاحتمالات الانتقالية على صورة مصفوفة :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} \qquad (6.23)$$

وتسمى P مصفوفة الاحتمـــالات الانتقاليـــة (transition probability matrix) ويمكننا أيضاً تعريف الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوتين، ونرمـــز لهـــا بـــالرمز $p_{ij}^{(2)}$، وهي التي نعتبر فيها أن النظام في الحالة i ســـيكون فـــي الحالـــة j بعـــد خطوتين، أي أن :

$$p_{ij}^{(2)} = P[X_n = j \mid X_{n-2} = i] \qquad (6.24)$$

ويمكن حساب الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوتين $p_{ij}^{(2)}$ من الاحتمالات الانتقاليـــة (ذات الخطوة الواحدة) p_{ij} كالآتي :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{M} p_{ik} \, p_{kj} \qquad (6.25)$$

فإذا كتبنا :

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & \cdots & p_{1M}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & \cdots & p_{2M}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ p_{M1}^{(2)} & p_{M2}^{(2)} & \cdots & p_{MM}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

فإنه باستخدام (6.23)، (6.25)، نلاحظ أن :

$$P_2 = P^2 \tag{6.27}$$

حيث P هي المصفوفة في (6.23). أي أن مصفوفة الاحتمـــالات الانتقاليـــة ذات الخطوتين تساوي مربع مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (ذات الخطوة الواحدة).

ولإثبات (6.25)، فإننا نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= P[X_n = j \mid X_{n-2} = i] \\ &= \sum_{k=1}^{M} P[X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_{n-2} = i] \\ &= \sum_{k=1}^{M} P[X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_{n-2} = i]\, P[X_{n-1} = k \mid X_{n-2} = i] \\ &= \sum_{k=1}^{M} p_{kj}\, p_{ik} \end{aligned}$$

كما نلاحظ من (6.23) أن العنصر (i, j) في حاصل ضرب P في نفسه هو :

$$\sum_{k=1}^{M} p_{ik}\, p_{kj}$$

وهو عبارة عن $p_{ij}^{(2)}$ المعطى في (6.25). لذلك فإن (6.27) صحيحة.

وعلى وجه العموم، فإن الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوة m، ونرمز لها بــالرمز $p_{ij}^{(m)}$ ، هي التي نعتبر فيها أن النظام في الحالة i سيكون في الحالة j بعد m من الانتقالات. أي أن :

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n+m} = j \mid X_n = i]. \tag{6.28}$$

ويمكن حساب $p_{ij}^{(m)}$ باستخدام معادلات تشابمان ــ كلموجوروف الآتية :

نظرية (6.6) : معادلات تشابمان ــ كلموجوروف
Chapman-Kolmogorov Equations

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{M} p_{ik}^{(r)}\, p_{kj}^{(m-r)} \quad , r = 1, 2, ..., m-1, \tag{6.29}$$

حيث $p_{kj}^{(1)} \equiv p_{kj}$ ، $p_{ik}^{(1)} \equiv p_{ik}$

البرهان :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m)} &= P[X_{m+1} = j \mid X_1 = i] \\ &= \sum_{k=1}^{M} P[X_{m+1} = j, X_{r+1} = k \mid X_1 = i] \\ &= \sum_{k=1}^{M} P[X_{m+1} = j \mid X_{r+1} = k, X_1 = i]\, P[X_{r+1} = k \mid X_1 = i] \end{aligned}$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{M} p_{kj}^{(m-r)}\, p_{ik}^{(r)} \; .$$

وبكتابة مصفوفة الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوات m، التي يكون العنصر (i, j) فيها ، $p_{ij}^{(m)}$ ، على الصورة :

$$P_m = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \cdots & p_{1M}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \cdots & p_{2M}^{(m)} \\ \vdots & & & \\ p_{M1}^{(m)} & p_{M2}^{(m)} & \cdots & p_{MM}^{(m)} \end{pmatrix}$$

فإن معادلات تشابمان ـــ كلموجوروف تصبح على الصورة المصفوفية :

$$P_m = P_r \, P_{m-r} \quad , r = 1, 2, ..., \quad m - 1 . \tag{6.30}$$

إذا أخذنا $r = 1$، فإن المعادلة (6.29) تصبح على الصورة :

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{M} p_{ik} \, p_{kj}^{(m-1)} \, , m = 2, 3, ... \tag{6.31}$$

لذلك فإنه في الصيغة المصفوفية (قارن بالمعادلة (6.30)) تكون :

$$P_m = P \, P_{m-1} \, , m = 2, 3, ... \tag{6.32}$$

كما يمكن إثبات أن :

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{M} p_{ik}^{(m-1)} \, p_{kj} \quad , m = 2, 3, ... \tag{6.33}$$

فيكون صحيحاً أيضاً أن :

$$P_m = P_{m-1} \, P \, , m = 2, 3, ... \tag{6.34}$$

ويمكن كتابة (6.32)، (6.34) في صيغة واحدة لتصبح :

$$P_m = P \, P_{m-1} = P_{m-1} \, P, m = 2, 3, ... \tag{6.35}$$

الاحتمالات غير المشروطة $p_j^{(n)}$ حيث $p_j^{(n)} = P[\, X_n = j]$ تمثل احتمال أن تكون سلسلة ماركوف في الحالة j عند الزمن n، يمكن الحصول عليها بدلالة الاحتمالات الابتدائية غير المشروطة $p_i^{(1)} = P[X_1 = i]$ كالآتي :

$$P_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{M} p_{ij}^{(n-1)} \, p_i^{(1)} \, , n = 2, 3, ... \tag{6.36}$$

إذا اعتبرنا أن $p^{(1)}$ ، $p^{(n)}$ هما المتجهين اللذين تكون مكوناتهما على الترتيب $p_j^{(1)}$ ، $p_i^{(n)}$ أي $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, ..., p_M^{(n)}\right), p^{(1)} = \left(p_1^{(1)}, ..., p_M^{(1)}\right),$

فإن (6.36) يمكن كتابتها، لقيم $n = 2, 3, ...$ على الصورة :

$$p^{(n)} = P_{n-1} \, P^{(1)} = P^{(1)} \, P_{n-1} \; . \tag{6.37}$$

ولإثبات (6.36) فإننا نلاحظ أن :

$$p_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i=1}^{M} P[X_n = j | X_1 = i] P[X_1 = i] = \sum_{i=1}^{M} p_{ij}^{(n-1)} p_i^{(1)} .$$

لعدد كبير من سلاسل ماركوف، تتقارب $p_{ij}^{(n)}$ عندما $n \to \infty$ إلى قيمة π_j تعتمد فقط على j ولا تعتمد على i. أي أنه لقيم n الكبيرة، فإن احتمال أن يكون النظام في الحالة j بعد n من الانتقالات يساوي تقريباً π_j بغض النظر عن الحالة الابتدائية، ونكتب $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ عندما $n \to \infty$. ويمكن إثبات أن الشرط الكافي لأن تختص سلسلة ماركوف بهذه الخاصية هو أنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن :

$$p_{ij}^{(n)} > 0 , \quad i, j = 1, 2, \ldots, M \text{ لجميع قيم} \qquad (6.38)$$

تعريف (6.4) : نقول عن سلسلة ماركوف ذات الحالات M إنها ارتدادية (ergodic) بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية P، إذا وجدت أعداد π_1، ...، π_M بحيث أنه لأي حالتين i، j فإن : $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. وتحقق سلسلة ماركوف الارتدادية الشرط (6.38).

نظرية (6.6) : لسلسلة ماركوف الارتدادية توجد π_j بحيث أن :

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} , \qquad (6.39)$$

وتكون π_j $(1 \le j \le M)$ هي الحلول الوحيدة للمعادلات.

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{M} \pi_k \, p_{kj} , \qquad (6.40)$$

حيث

$$\sum_{j=1}^{M} \pi_j = 1 \,. \qquad (6.41)$$

البرهان : نلاحظ من المعادلة (6.33) أن

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{M} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n-1)} \, p_{kj}$$

ونظراً لأن سلسلة ماركوف ارتدادية فـإن $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ ، $\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n-1)} = \pi_k$
لذلك فإنه لجميع قيم j بحيث أن $1 \le j \le M$ ، تكون

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{M} \pi_k \, p_{kj} \,.$$

ونظراً لأن $\sum_{j=1}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1$ ، لذلك فإنه من (6.39) ينتج أن :

$$\sum_{j=1}^{M} \pi_j = \sum_{j=1}^{M} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1 \,.$$

إذا كانت سلسلة ماركوف ارتدادية فإنها تحقق بعد عدد كبير من المحاولات **اتزانـاً إحصائياً** بمعنى أن الاحتمالات غير المشروطة $p_{ij}^{(n)}$ تؤول إلى π_j بغض النظـر عن قيم الاحتمالات الابتدائية غير المشروطة p_j . أي أن :

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \pi_j \qquad (6.42)$$

فباستخدام (6.36)، (6.42)، فإننا نلاحظ أن :

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{M} p_i^{(1)} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n-1)} = \pi_j \sum_{i=1}^{M} p_i^{(1)} = \pi_j \,,$$

ذلك لأن : $\sum_{i=1}^{M} p_i^{(1)} = 1$.

ملاحظات :

(1) إذا كانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P من رتبة $M \times M$ فـإن سلـسلة ماركوف تتكون من M من الحالات. ويمكن (باستخدام P) إيجاد مـصفوفات

الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوتين والثلاث خطوات، ...، M من الخطوات حيث $P_m = P_{m-1}\, P\,, m = 2, 3, ..., M$ كما في (6.35).

(2) تسمى π_1 ، ... ، π_M الاحتمالات المستقرة (stationary probabilities)، ويكفي حل مجموعة المعادلات (6.40) لإيجاد هذه الاحتمالات.

(3) توصف المصفوفة $A = (a_{ij})_{M\times M}$ بأنها مصفوفة استوكاستيكية (stochastic matrix) إذا كان مجموع عناصر كل صف من صفوفها يساوي الواحد، أي إذا كان : $\sum_{j=1}^{M} a_{ij} = 1\,, i = 1, 2, ..., M$.

كما توصف المصفوفة A بأنها مزدوجة الاستوكاستيكية (doubly stochastic) إذا كان بالإضافة إلى أن مجموع عناصر كل صف من صفوفها يساوي الواحد، فإن مجموع عناصر كل عمود من أعمدتها أيضاً يساوي الواحد، أي أنه بالإضافة إلى الشرط السابق يكون : $\sum_{i=1}^{M} a_{ij} = 1, j = 1, 2, ..., M$.

ومن الواضح أن مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P هي مصفوفة استوكاستيكية فإن كانت مزدوجة الاستوكاستيكية، فإن الاحتمالات المستقرة تكون متساوية والقيمة المشتركة لها هي $\frac{1}{M}$ ، أي أن :

$$\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_M = \frac{1}{M}, \qquad (6.43)$$

حيث تمثل M عدد الحالات في سلسلة ماركوف.

النتيجة (6.43) صحيحة إذا لاحظنا أنه إذا كانت P استوكاستيكية مزدوجة فإنه بتعويض (6.43) في (6.40) نجد أن :

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{M}\right) p_{kj} = \frac{1}{M}, \quad j = 1, 2, \ldots, M,$$

وكذلك فإن :

$$\sum_{j=1}^{M} M_j = \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{M}\right) = 1$$

مثال (6.7) : بافتراض أنها ستمطر أو لا تمطر غداً ــ في إحدى المناطق ــ يعتمد على الأحوال الجوية السابقة فقط من خلال أنها تمطر اليوم من عدمه. إفــرض أن احتمال إمطارها غدا إن أمطرت اليوم هو a، واحتمال إمطارها غدا إن لم تمطــر اليوم هو b. إذا اعتبرنا أن الحالة الجوية عندما تمطر هي الحالــة 1 وعنــدما لا تمطر هي الحالة 2، فإن الحالة الجوية المذكورة تمثل سلسلة مــاركوف حيث :

إحتمال إمطارها غدا إن أمطرت اليوم $p_{11} = a$

إحتمال عدم إمطارها غدا إن أمطرت اليوم $p_{12} = 1 - a$

إحتمال إمطارها غدا إن لم تمطر اليوم $p_{21} = b$

إحتمال عدم إمطارها غدا إن لم تمطر اليوم $p_{22} = 1 - b$

وتكون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية من رتبة 2×2 ــ هي :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

لاحظ أن مجموع عناصر كل صف هو الواحد، فمصفوفة $\mathbf{P}$ مصفوفة استوكاستيكية. والاحتمالات الانتقالية ذات الخطوتين تعني في مثالنا هذا الاحتمالات الانتقالية ذات اليومين، ويمكن حساب هذه الاحتمالات الانتقالية باستخدام (6.27) حيث :

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} a^2 + b(1-a) & (1-a)(1+a-b) \\ b(1+a-b) & b(1-a)(1-b)^2 \end{pmatrix}$$

وتكون عناصر المصفوفة P_2 هي :

إحتمال إمطارها بعد غد إن أمطرت اليوم $p_{11}^{(2)} = a^2 + b(1-a)$

إحتمال عدم إمطارها بعد غد إن أمطرت اليوم $p_{12}^{(2)} = (1-a)(1+a-b)$

إحتمال إمطارها بعد غد إن لم تمطر اليوم $p_{21}^{(2)} = b(1+a-b)$

إحتمال عدم إمطارها بعد غد إن لم تمطر اليوم $p_{22}^{(2)} = b(1-a)(1-b)^2$

وهكذا يمكن حساب الاحتمالات الانتقالية ذات الأيام n باستخدام (6.35) حيث تحسب P_3 من حاصل ضرب P_2 في P، وتحسب P_4 من حاصل ضرب P_3 في P وهكذا P_m من حاصل ضرب P_{m-1} في P وعموماً فإن $P_m = P^m$.

فإذا علمنا احتمال إمطارها غداً إن أمطرت اليوم بأنه $a = 0.8$، وأن احتمال إمطارها غداً إن لم تمطر اليوم هو $b = 0.4$، فإن :

احتمال إمطارها بعد غد إن أمطرت اليوم هو :

$$p_{11}^{(2)} = (0.8)^2 + (0.4)(0.2) = 0.72$$

واحتمال عدم إمطارها بعد غد إن هي أمطرت اليوم هو :

$$p_{12}^{(2)} = (0.2)(1 + 0.8 - 0.4) = 0.28$$

واحتمال إمطارها بعد غد إن لم تمطر اليوم هو :

$$p_{21}^{(2)} = (0.4)(1 + 0.8 - 0.4) = 0.56$$

واحتمال عدم إمطارها بعد غد إن لم تمطر اليوم هو :

$$p_{22}^{(2)} = (0.4)(0.2) + (0.6)^2 = 0.44$$

وتكون في هذه الحالة :

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \;, P_2 = P^2 = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P^3 = \begin{pmatrix} 0.688 & 0.312 \\ 0.624 & 0.376 \end{pmatrix} \;, P_4 = P^4 = \begin{pmatrix} 0.6752 & 0.3248 \\ 0.6496 & 0.3504 \end{pmatrix}$$

وهكذا. ونلاحظ أن سلسلة ماركوف في هذا المثال ارتدادية لأنه (مثلا) تكون جميع عناصر P_2 موجبة فإذا أردنا حساب الاحتمال النهائي لكي تمطر في اليوم n (حيث $n = 1, 2, 3, \dots$)، فإننا نستخدم (6.40) حيث p_{kj} هي عناصر مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P في (6.44)، $(k, j = 1, 2)$، $M = 2$، لنحصل على :

$$\pi_1 = a\,\pi_1 + b\,\pi_2 \,,$$
$$\pi_2 = (1 - a)\,\pi_1 + (1 - b)\,\pi_2$$

حيث : $\pi_1 + \pi_2 = 1$.

بضرب المعادلة الأولى في (1-a) والثانية في a ثم طرح الثانية من الأولى، فإن :

$$(1 - a)\,\pi_1 - a\,\pi_2 = [b\,(1 - a) - a\,(1 - b)\,]\,\pi_2$$
$$\Rightarrow (1 - a)\,\pi_1 + (1 - a)\,\pi_2 - \pi_2 = (b - a)\,\pi_2 \quad \text{and} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$$
$$\Rightarrow (1 - a)\,(\pi_1 + \pi_2) = (1 + b - a)\,\pi_2$$
$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{1 - a}{1 + b - a} \quad , \quad \pi_1 = \frac{b}{1 + b - a}$$

وتمثل π_1 الاحتمال النهائي لكي تمطر في اليوم n، π_2 الاحتمال النهائي لكي لا تمطر في اليوم n.

فعندما $a = 0.8$، $b = 0.4$، فإن الاحتمال النهائي أنها ستمطر في اليوم n هو $\pi_1 = \frac{1}{3}$.

مثال (6.8) : تعبر رتبة مصفوفة الاحتمالات الانتقالية M عن عدد حالات (أزمنة) سلسلة ماركوف، فإذا كانت $M = 3$ مثلاً فإن عدد حالات السلسلة هو 3 كما في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة مزدوجة الاستوكاستيكية.

ويمكن حساب المصفوفة الاحتمالية الانتقالية ذات الخطوتين والثلاث خطوات كالآتي :

$$P_2 = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix}, \quad P_3 = P^3 = \begin{pmatrix} \frac{28}{64} & \frac{9}{64} & \frac{27}{64} \\ \frac{27}{64} & \frac{28}{64} & \frac{9}{64} \\ \frac{9}{64} & \frac{27}{64} & \frac{28}{64} \end{pmatrix}$$

وإذا كانت الاحتمالات غير المشروطة الابتدائية هي :

$$p^{(1)} = \left(p_1^{(1)}, \quad p_2^{(1)}, \quad p_3^{(1)}\right) = \left(\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}\right)$$

فإنه من المعادلة (6.37) تصبح :

$$p^{(2)} = \left(p_1^{(2)}, \quad p_2^{(2)}, \quad p_3^{(2)}\right) = p^{(1)} P = \left(\frac{7}{16}, \quad \frac{4}{16}, \quad \frac{5}{16}\right)$$

$$p^{(3)} = \left(p_1^{(3)}, \quad p_2^{(3)}, \quad p_3^{(3)}\right) = p^{(1)} P_2 = p^{(2)} P = \left(\frac{17}{64}, \quad \frac{22}{64}, \quad \frac{25}{64}\right)$$

$$p^{(4)} = \left(p_1^{(4)}, \quad p_2^{(4)}, \quad p_3^{(4)}\right) = p^{(1)} P_3 = p^{(3)} P = \left(\frac{91}{256}, \quad \frac{92}{256}, \quad \frac{73}{256}\right)$$

سلسلة ماركوف في هذا المثال ارتدادية لأن جميع عناصر P_2 (مثلاً) موجبة.

ولحساب الاحتمالات النهائية π_j ، فإنه باستخدام (6.40) حيث $M = 3$ يكون :

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{3} \pi_k \, p_{kj} \ ; \ j = 1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow \ \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \ , \qquad \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 \ ,$$

$$\pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 \ .$$

ويكون حل هذه المعادلات الثلاث هو $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$

وهذا يعني أنه على المدى البعيد تكون الحالات 1، 2، 3 متساوية الاحتمال لتمثـل حالة سلسلة ماركوف.

تمـــارين (6)

(1) إذا كان معدل تعطل عنصر هو :
$$h(t)=\begin{cases} C_1 &, 0<t<t_0 , \\ C_2 &, t\geq t_0 , \end{cases}$$

حيث C_1 ، C_2 ثابتان غير سالبين.

(أ) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T الذي يمثل الــزمن إلـــى التعطل (عمر العنصر)، وارسم منحنى هذه الدالة. [إرشاد: اعتبـــر حـــالتين $C_2<C_1$ ، $C_2>C_1$].

(ب) إذا كان $C_1=0$ (أي أن العنصر لا يتعطل قبل الزمن t_0) حيث تصبح
$$h(t)=\begin{cases} 0 &, 0<t<t_0 , \\ C &, t\geq t_0 . \end{cases}$$

فاوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T وارسم منحنى هذه الدالة.

(جـــ) إحسب $E(T)$ في الحالة (ب).

(2) وتعميم آخر للتوزيع الأسي للاحتمالات، إفرض أن معدل التعطـــل المـــرتبط بطول عمر عنصر T هو :
$$h(t)=\begin{cases} C_1 &, 0<t\leq t_0 , \\ C_1+C_2\,(t-t_0) &, t\geq t_0 . \end{cases}$$

(أ) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T .

(ب) أوجد دالة موثوقية العنصر $R(t)$ وارسم منحنى الدالة.

[لاحظ أنه عندما $C_2=0$ فإن معدل التعطل يصبح الثابت C_1 (لجميع قيم $t>0$) ويكون التوزيع المقابل في هذه الحالة هو التوزيع الأسي بالبارامتر C_1] .

(3) يخضع عمر عنصر T للدالة

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{(c+t)^{k+2}} & ,\ t>0\ ,\\ 0 & ,\ t\le 0\ .\end{cases}$$

(أ) أوجد قيمة الثابت A (بدلالة c، k) الذي يجعل $f_T(t)$ دالة كثافة احتمالية مع تحديد القيم التي تجعل البارامترين c، k يصلحان لجعل $f_T(t)$ دالة كثافة احتمالية.

(ب) أوجد دالة الموثوقية وكذا دالة معدل التعطل.

(جـ) إثبت أن دالة معدل التعطل الناتجة في (ب) دالة تناقصية في t.

(4) نموذج الخليط الأسي للاحتمالات

يخضع قانون التعطل لعنصر لدالة الكثافة الاحتمالية

$$f_T(t)=\sum_{j=1}^{k} p_j\, f_j(t) \qquad (1)$$

حيث تمثل $f_j(t)$ دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي للاحتمالات بالبارامتر β_j ، أي أن :

$$f_j(t)=\begin{cases}\beta_j\, e^{-\beta_j t} & ,\ t>0\ ,\\ 0 & ,\ t\le 0\ .\end{cases} \qquad (2)$$

لكي تمثل $f_T(t)$ دالة كثافة احتمالية فلابد من أن تكون $p_j>0$ لجميع قيم $j = 1, .., k$ وكذا $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$ (حقق ذلك!).

تسمى $f_T(t)$ **الخليط المحدود** (finite mixture) المكون من **المكونات** (components) $f_j(t)$ $(j = 1, \ldots, k)$ وتسمى p_j نسبة الخلط (mixing roportion). المكونات $f_j(t)$ هي دوال كثافة احتمالية، وحينما تكون أسية (كما في مثالنا هذا) فإن النموذج يعرف بالخليط الأسي للاحتمالات.

(أ) إثبت أن دالة الموثوقية $R(t)$ المقابلة للخليط المحدود (1) هي

$$R(t) = \sum_{j=1}^{k} p_j \, R_j \, (t) \qquad (3)$$

حيث $R_j(t)$ $(j = 1, \ldots, k)$ هي دالة الموثوقية المقابلة للكثافة $f_j(t)$.

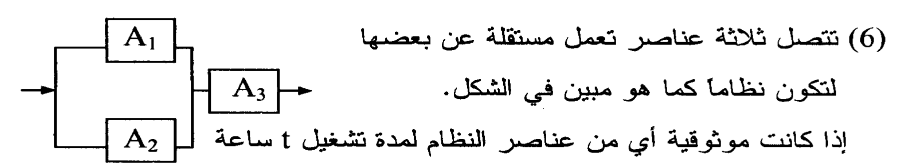
(ب) إثبت أن دالة معدل التعطل $h(t)$ المقابلة للخليط المحدود (1) يمكن كتابتها على الصورة :

$$h(t) = \sum_{j=1}^{k} a_j \, h_j \, (t) \qquad (4)$$

حيث $a_j = \dfrac{p_j \, R_j(t)}{\sum_{i=1}^{k} p_i \, R_i(t)}$، $h_j(t)$ هي دالة معدل التعطل للمكون j .

(جـ) إذا كان قانون المكون j هو القانون الأسي $f_j(t)$ في (2)، خصص $R(t)$، $h(t)$ في (3)، (4) لإيجادهما في هذه الحالة الأسية، ثم إحسب متوسط الزمن إلى التعطل (أي إحسب ET) في الحالة الأسية.

(5) إذا اعتبرنا عمر قمر صناعي متغيراً عشوائياً خاضعاً للقانون الأسي للاحتمالات بمتوسط عمر متوقع سنة ونصف، وإذا أطلقت ثلاثة من هذه الأقمار الصناعية في نفس الوقت، فما هو احتمال أن يظل اثنان منهما على الأقل في مدارهما بعد عامين؟



(6) تتصل ثلاثة عناصر تعمل مستقلة عن بعضها لتكون نظاماً كما هو مبين في الشكل.
إذا كانت موثوقية أي من عناصر النظام لمدة تشغيل t ساعة

هي $R^*(t) = e^{-0.03t}$ ، وإذا مثل المتغير العشوائي T الـزمن إلـى التعطـل (عمر) النظم كله بالساعات.

(أ) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T.

(ب) أوجد دالة الموثوقية للنظام $R(t)$ وقارنها بدالة موثوقية العنصر $R^*(t)$.

[إرشاد : ارسم منحنى كل من الدالتين $R(t)$، $R^*(t)$ لقيم t المختلفة].

(7) تتصل ثلاثة عناصر تعمل مستقلة عن بعضها على التـوازي لتكـون نظامـاً تخضع عناصره لقانون وايبـل للتعطـل بالبـارامترات (α, β_1)، (α, β_2)، (α, β_3).

(أ) أوجد دالة الموثوقية $R(t)$ للنظام.

(ب) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية $f_T(t)$ للنظام حيث T تمثل عمر النظام.

(جـ) أوجد متوسط عمر النظام.

(8) يخضع عمر عنصر T (بالساعات) للتوزيع المعتدل $N(\mu = 90, \sigma^2 = 25)$. أوجد عدد ساعات تشغيل العنصر إذا أردنا أن تكون موثوقيتـه 0.90، 0.95، 0.99.

(9) يخضع عمر جهاز إلكتروني T للقانون الأسـي للاحتمـالات. إذا علمـت أن موثوقية الجهاز لتشغيله 100 ساعة هي 0.9، فما هي عدد سـاعات تـشغيل الجهاز لكي يحقق موثوقية 0.95 ؟.

(10) إذا اتصلت n من عناصر نظام على التوالي، وإذا كان عمر النظام T يخضع للتوزيع المعتدل بمتوسط 50 ساعة وانحراف معياري 5 ساعات.

(أ) إذا كانت $n = 4$ فما احتمال أن يظل النظام يعمل بعد 52 ساعة.

(ب) ما هي قيمة n لكي يكون احتمال التعطل أثناء الساعات الـ 55 الأولى هو 0.01 تقريباً ؟.

(11) في نظام التوالي (n من العناصر) ـــ التوازي (m من العناصر)، إذا خضعت أعمار العناصر للقانون الأسي بمعدل تعطل 0.05، وإذا كانت n =5، وزمن التشغيل هو 10 ساعات، فاوجد قيمة m لكي تكون موثوقية النظام كله هي 0.99.

(12) في نظام التوازي (m من العناصر) ـ التوالي (n من العناصر)، أوجد قيمة m لكي تكون موثوقية النظام كله هي 0.99 تحت نفس مواصفات السؤال (11).

(13) إحسب مصفوفات الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوتين، والخطوات الثلاث لسلاسل ماركوف التي تكون مصفوفات احتمالاتها الانتقالية هي :

(i) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (ii) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(iii) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (iv) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

ثم حدد ما إذا كانت سلسلة ماركوف في كل حالة ارتدادية أم غير ارتدادية.

(14) أوجد الاحتمالات النهائية لكل من سلاسل ماركوف الارتدادية الآتية :

(i) $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, (ii) $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

(iii) $P=\begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$, (iv) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(v) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, (vi) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$



ملاحق الكتاب



ملحق (A)

بعض القواعد والصيغ الجبرية

(A.1) قواعد الجمع والضرب للأعداد :

$$\sum_{i=a}^{b} x_i = x_a + x_{a+1} + \ldots + x_b \,,$$

$$\prod_{i=a}^{b} x_i = x_a \, x_{a+1} \ldots x_b \,,$$

لأي عددين صحيحين غير سالبين a، b بحيث أن $a \le b$.

فمثلا : $\sum_{i=3}^{7} (-1)^{i-3} \, i \, x^{2i} = 3x^6 - 4x^8 + 5x^{10} - 6x^{12} + 7x^{14}$

وكذلك فإن : $\prod_{i=2}^{6} i \, x^{6-i} = (2x^4)(3x^3)(4x^2)(5x)(6)$

وتخضع المجاميع وحواصل الضرب للقواعد الآتية :

نظرية (A.1) :

(A.1) $\sum_{i=1}^{n} k\, x_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i$ (k ثابت لا يعتمد على i).

(A.2) $\sum_{i=1}^{n} k = n\,k$

(A.3) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \,.$

(A.4) $\prod_{i=1}^{n} k\, x_i = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i \,.$

(A.5) $\prod_{i=1}^{n} k = k^n \,.$

(A.6) $\prod_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right) .$

(A.7) $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \,.$

كما تستخدم المجاميع الثنائية والثلاثية ... الخ، حيث (مثلا)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left[x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}\right].$$

$$\begin{aligned} &= x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \\ &+ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \\ &\vdots \\ &+ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \end{aligned}$$

سنكتب المجموع

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \dots + x_1 x_n \\ x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n \\ x_3 x_4 + \dots + x_3 x_n \\ \vdots \\ + x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

على الصورة :

$$\sum_{i<j}\sum x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j$$

نظرية (A.2) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j}\sum x_i x_j$$

نظرية (A.3) :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} i^j\right) = (n+1)^k - 1$$

لأي عددين صحيحين موجبين n، k.

وباستخدام هذه النظرية، يمكن إثبات أن :

$$\text{(A.8)}\quad \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n+1)\ ,$$

$$\text{(A.9)}\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (2n+1)(n+1)\ ,$$

$$(A.10)\quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 ,$$

$$(A.11)\quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$$

$$= \frac{1}{30} n\,(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

وهكذا .

فمثلاً عندما $k = 1$ تتحقق المتطابقة في نظرية (A.3)، إذ أن : $\sum_{i=1}^{n}(1) = n$

وعندما $k = 2$ فإنه من نظرية (A.3) :

$$\sum_{j=0}^{1}\binom{2}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} i^j\right) = (n+1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(1) + 2\sum_{i=1}^{n} i = n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n\,(n+1).$$

وعندما $k = 3$ فإنه من نظرية (A.3) :

$$\sum_{j=0}^{2}\binom{3}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} i^j\right) = (n+1)^3 - 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(1) + 3\sum_{i=1}^{n} i + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$\Rightarrow n + \frac{3}{2} n\,(n+1) + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n\left[n^2 + 3n + 3\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} n\left[n^2 + 3n + 3 - 1 - \frac{3}{2}(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6} n\left[2n^2 + 3n + 1\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n\,(2n+1)(n+1)$$

وعندما k = 4 فإنه من نظرية (A.3) :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{4}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} i^j\right)=(n+1)^4-1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(1)+4\sum_{i=1}^{n} i+6\sum_{i=1}^{n} i^2+4\sum_{i=1}^{n} i^3=n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$\Rightarrow n+2n(n+1)+n(2n+1)(n+1)+4\sum_{i=1}^{n} i^3=n\left[n^3+4n^2+6n+4\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n\left[n^3+4n^2+6n+4-1-2n-2-2n^2-3n-1\right]$$

$$=\frac{1}{4}n\left[n^3+2n^2+n\right]$$

وهكذا يمكنك إثبات الحالة الأخيرة (A.11).

تمثل الصيغة (A.8) مجموع متسلسلة عددية حدها الأول 1 وحدها الأخير n وأساسها 1. ويمكن استخدامها في إيجاد مجموع متسلسلة عددية حدها الأول a وأساسها d وعدد حدودها n، فنحصل على :

$$\text{(A.12)}\quad \sum_{j=1}^{n}\left[a+(j-1)d\right]=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[a+(n-1)d\right]$$

$$=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

لاحظ أنه من قواعد المجموع (A.3)، (A.1)، (A.2) في نظرية (A.1) ثم استخدام الصيغة (A.8) فإن :

$$\sum_{j=1}^{n}\left[a+(j-1)d\right]=\sum_{j=1}^{n}(a-d)+d\sum_{j=1}^{n} j=n(a-d)+d\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{n}{2}\left[2a-2d+nd+d\right]=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right].$$

وأما المتسلسلة الهندسية (المحدودة) ذات الحد الأول a والأساس r وعدد الحدود n فإن مجموعها هو :

$$(A.13)\quad \sum_{j=0}^{n-1} a\,r^j = a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^{n-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$

نظرية (A.4) :
$$\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{k}{\ell} m^{\ell} = (m+1)^k - m^k$$

هذه النظرية نتيجة- مباشرة لاستخدام مفكوك ذات الحدين للمقدار $(m+1)^k$، ويمكن استخدامها في إثبات نظرية (A.3).

(A.2) المضاريب ومعاملات ذات الحدين :

حاصل ضرب أي عدد صحيح موجب n في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغره يرمز له بالرمز $n!$ ويسمى مضروب n (يقرأ بالإنجليزية "n factorial")، لذلك فإن :

$$n! = n\,(n-1)\,...\,(3)\,(2)\,(1) = \prod_{j=1}^{n}(n-j+1)$$

ونكتب اصطلاحاً ــ أن : $0! = 1$.

حاصل ضرب أي عدد صحيح موجب n في الأعداد $(k-1)$ التالية الصحيحة الموجبة التي تصغره يرمز له بالرمز $(n)_k$ ويقرأ تباديل k من n. لذلك فإن :

$$(n)_k = n\,(n-1)...(n-k+1) = \prod_{j=1}^{k}(n-j+1)$$

لاحظ أنه يوجد k من الحدود في $(n)_k$، كما أن :

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

معامل ذات الحدين $\binom{n}{k}$، ويقرأ "توافيق k من n" ويعرف بالآتي :

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$ n صحيح موجب

حيث $\binom{n}{k} = 0$، إذا كانت $k < 0$ أو $k > n$، عندما n صحيح موجب.

حقائق :

$$(A.14)\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$(A.15)\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$(A.16)\quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},\ n = 1,2,...,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ويمكن تعميم التباديل $(n)_k$ والتوافيق $\binom{n}{k}$ لأي عدد حقيقي a بدلاً من العدد الصحيح الموجب n بكتابة :

$$(a)_k = a\,(a-1)...(a-k+1),$$

$$\binom{a}{k} = \frac{a\,(a-1)...(a-k+1)}{k!},\ k = 1, 2, ..., \binom{a}{0} = 1.$$

فمثلاً : $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{1}{8}$ وكذلك

$$\binom{-3}{5} = \frac{(-3)\,(-4)\,(-5)(-6_(-7)}{5!} = -21$$

$$(A.17)\quad \binom{-n}{j} = \frac{(-n)\,(-n-1)...(-n-j+1)}{j!}$$

$$= (-1)^j\,\frac{(n+j-1)...(n+1)\,n}{j!}$$

$$\binom{-n}{j} = (-1)^j \binom{n+j-1}{j}$$

تقريب ستيرلنج للمضروب

$$(A.18) \quad n! \cong \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \ ,$$

أو

$$n! \cong \sqrt{2\pi}\, e^{-n+\frac{1}{2}}\, e^{r(n)/12n}$$

حيث : $1 - \dfrac{1}{12n+1} < r(n) < 1$.

(A.3) مفكوك ذات الحدين، ومتعدد الحدود :

أولاً : عندما n صحيح موجب

$$(A.19) \quad (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n-j}$$

$$= b^n + \binom{n}{1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2\, b^{n-2} + \ldots + a^n$$

$$(A.20) \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n .$$

$$(A.21) (1-x)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^j = 1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \ldots + (-1)^n x^n .$$

$$(A.22) \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n .$$

$$(A.23) \quad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0 .$$

ثانياً : عندما a، b ليسا صحيحين موجبين

$$(A.24) \ (1+x)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} x^j = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \ldots , \ |x| < 1 .$$

بكتابة مفكوك طرفي المتطابقة : $(1+x)^a\,(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$

ثم مقارنة معاملي x^n في الطرفين، فإننا نحصل على :

لأي عددين حقيقين a، b

$$(A.25)\quad \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}.$$

وباستخدام (A.24)، (A.12)، فإن :

$$(A.26)\quad (1-x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j}(-x)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} x^j$$

$$= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \ldots,\ |x|<1.$$

وعندما n = 1، فإننا نحصل من (A.26) علـى مجمـوع المتسلـسلة الهندسـية اللانهائية ذات الأساس x :

$$(A.27)\quad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}\quad,\ |x|<1.$$

وعندما n = 2، فإننا نحصل من (A.26) على مجموع المتسلسلة اللانهائية :

$$(A.28)\quad 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x^j = \frac{1}{(1-x)^2}\ ,\ |x|<1.$$

وعندما n = 3، فإننا نحصل من (A.26) على مجموع المتسلسلة اللانهائية :

$$(A.29)\quad 2.1 + 3.2x + 4.3x^2 + 5.4x^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)x^j$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3}\quad,\ |x|<1.$$

مفكوك متعدد الحدود هو تعميم لمفكوك ذات الحدين، إذ أن :

$$(A.30)\quad \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n = (a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum \binom{n}{j_1,\ldots,j_k} a_1^{j_1}\ldots a_k^{a_k},$$

حيث : $\binom{n}{j_1,\ldots,j_k} = \frac{n!}{j_1!\ldots j_k!}\ ,\ \sum_{i=1}^{k} j_i = n$

وبحيث يكون المجموع $\sum$ مأخوذاً على جميع الأعداد الصحيحة غيـر الـسالبة j_1، ...، j_k التي يكون مجموعها n.

(A.4) قواعد الاتحاد والتقاطع والضرب الكارتيزي للمجموعات :

سنكتب لاتحاد المجموعات A_1 ،... ، A_k :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_k ,$$

وسنكتب لتقاطع المجموعات A_1 ،... ، A_k :

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_k ,$$

وسنكتب لحاصل الضرب الكارتيزي للمجموعات A_1 ،... ، A_k :

$$\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} A_i = A_1 \times \ldots \times A_k .$$



ملحق (B)

بعض الصيغ الرياضية الأخرى الهامة

تعرف دالة جاما لأي عدد حقيقي موجب α ، ويرمز لها بالرمز $\Gamma(\alpha)$ بالتكامل

$$\text{(B.1)}\quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad , (\alpha > 0).$$

ومن خصائص هذه الدالة أن :

$$\text{(B.2)}\quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1),$$

$$\text{(B.3)}\quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)\Gamma(\alpha-r).$$

ونظراً لأنه من التعريف (1)، تكون $\Gamma(1)=1$ ، فإنه لأي عدد صحيح موجب n :

$$\text{(B.4)}\quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\text{(B.5)}\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad , \text{ n عدد صحيح}$$

$$\text{(B.6)}\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

من الصيغ التي تستخدم في إثبات صيغ أخرى هامة مثل (B.6) والعلاقة بين دالة جاما ودالة بيتا المعطاة في (B.12)، الصيغة الآتية التي يمكن الحصول عليها بتطبيق التحويل $x = \frac{y^2}{2\sigma^2}$ على التعريف (B.1) :

$$\text{(B.7)}\quad \Gamma(\alpha) = \frac{2}{(2\sigma^2)^\alpha}\int_0^\infty y^{2\alpha-1} e^{-y^2/(2\sigma^2)}\, dy.$$

ويمكن على سبيل المثال اعتبار $\alpha = \frac{1}{2}$ ، $\sigma = 1$ في (B.7) لنحصل على :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-y^2/2}\, dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

ولإثبات أن :

$$\text{(B.8)}\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

فإننا نلاحظ ـــ بكتابة . $I=\int_0^{\infty} e^{-y^2/2}\,d y$ ـــ أن :

$$I^2=\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} d x\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} d y\right).$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, d x\, d y$$

وباستخدام التحويل القطبي : $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ ، فإن :

$$d x\, d y=r\, d r\, d\theta$$

لذلك فإن :

$$I^2=\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} d r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)=\frac{\pi}{2}.$$

ويصبح : $I=\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} d y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ، لذلك فإن التكامل علـــى طـــول الخـــط المستقيم هو :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} d y = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} d y=\sqrt{2\pi}.$$

$$\text{(B.9)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/(2\sigma^2)} d z=\sqrt{2\pi}\,\sigma .$$

وينتج هذا التكامل بتطبيق التحويل : $y=\frac{z}{\sigma}$ على التكامل في (B.8).

تعميم التكامل في (B.1) يكون على الصورة :

$$\text{(B.10)}\quad \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} d x=\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}\ ,\ (\alpha>0,\beta>0)$$

تعرف دالة بيتا بالتكامل :

$$\text{(B.11)}\quad B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} d x .$$

ويمكن إثبات أن :

$$\text{(B.12)}\quad B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

لاحظ أنه باستخدام (B.7) عندما $\sigma^2=\frac{1}{2}$ ، فإن :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d x\, d y$$

وباستخدام التحويل القطبي $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ، $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ،

فإن :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1} d\theta \int_0^{\infty} r^{2\alpha+2\beta-1} e^{-r^2} dr$$

وبملاحظة أن التكامل الثاني هو نصف التكامل في (B.7) عندما $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ، وعندما نستبدل α بالبارامتر $(\alpha+\beta)$ لذلك فإن :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 2\,\Gamma(\alpha+\beta) \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1} d\theta\,.$$

وباستخدام التحويل $\cot an\,\theta = \sqrt{y}$ في التكامل المتبقي، فإن :

$$2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy = B(\alpha,\beta)$$

ينتج من ذلك أن :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha,\beta)$$

أي أن :

$$B(\alpha+\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ولإثبات أن :

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy = B(\alpha,\beta) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

فإننا نستخدم التحويل $x = \frac{1}{1+y}$ على الطرف الأيسر ليتحول إلى الصورة :

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy = \int_1^0 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\alpha+\beta} \left(-\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha,\beta)\,.$$

مفكوك تايلور لدالة g(x) حول x = a هو :

$$\text{(B.13)} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} g^{(j)}(a) + R_n\,,$$

$$= g(a) + (x - a)g^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} g^{(2)}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{2!} g^{(n)}(a) + R_n$$

حيث :

$$g^{(0)}(a) = g(a) \quad ، g^{(j)}(a) = \frac{d^j}{d\,x^j}(g(x))\bigg|_{x=a}$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(c) \quad , \quad a \le c \le x \,.$$

ويفترض هنا أن يكون للدالة $g(x)$ مشتقة من الرتبة $(n+1)$ على الأقل.

وإذا لم يكن الباقي R_n كبيراً فإن مفكوك تايلور يعطي تقريباً للدالة $g(x)$ بكثيرة حدود من درجة n، بعد اسقاط R_n.

فمثلاً، إذا اعتبرنا $g(x) = e^x$ ، فإن مفكوك تايلور لهذه الدالة الأسية حول $x = 0$ هو :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad , \ -\infty < x < \infty \,.$$

وإذا اعتبرنا أن : $g(x) = \sin x$، فإن مفكوك تايلور لهذه الدالة حول $x = 0$ هو

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

العلاقة بين دالة جاما غير التامة وتوزيع بواسون :

باستخدام التكامل بالتجزيء، يمكن إثبات أنه إذا كانت **k عدداً صحيحاً موجباً**، فإن :

$$\text{(B.14)} \quad \int_0^x y^{k-1} e^{-\beta y}\, d\,y = \frac{(k-1)!}{\beta^k} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x} \,.$$

$$= \frac{(k-1)!}{\beta^k} \left[1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x} \right]$$

وكذلك فإن :

$$\text{(B.15)} \quad \int_x^{\infty} y^{k-1} e^{-\beta y}\, d\,y = \frac{(k-1)!}{\beta^k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x} \,.$$

علاقة معامل ذات الحدين بدالة بيتا :

إذا كان كل من n، k عدداً صحيحاً موجباً بحيث أن $n \geq k$ ، فإن :

$$(B.16)\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{k\,\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)} = \frac{1}{k\,B(k, n-k+1)}$$

أو أن :

$$(B.17)\quad \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx = B(k, n-k+1) = \frac{1}{k\binom{n}{k}}.$$

علاقة دالة بيتا غير التامة بتوزيع ذات الحدين :

$$(B.18)\quad \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx = B(k, n-k+1)\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$$

حيث n، k عددان صحيحان موجبان بحيث أن $n \geq k$.

$$(B.19)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma.$$

$$(B.20)\quad \int_0^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x/2}\,dx = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right).2^{k/2}$$

$$(B.21)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} = \sqrt{\nu}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right).$$

$$(B.22)\quad \int_0^{\infty}\frac{x^{(\nu_1-2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} = \frac{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)}{\nu_1^{\nu_1/2}\,.\,\nu_2^{\nu_2/2}}\quad .$$

متسلسلة جاوس فوق الهندسية Gauss hypergeometyric series

$$(B.23)\quad {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,;z) = 1 + \frac{\alpha\,\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,;z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{z^r}{r!},$$

حيث

$$(\alpha)_r = \alpha\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1),$$

$$(\beta)_r = \beta\,(\beta+1)\ldots(\beta+r-1),$$

$$(\gamma)_r = \gamma\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1),$$

ودائرة تقارب هذه المتسلسلة هي دائرة الوحدة $|z|=1$.

وتصبح متسلسلة جاوس فوق الهندسية كثيرة حدود من درجة r في المتغير z عندما تكون α أو β مساوية r - حيث $r = 0, 1, 2, \ldots$.

ملحق (C)

المجموعات (Sets)

أثّر مفهوم "المجموعة" الذي يعزى إلى الرياضي جورج كانتور (Cantor) ــ (1845-1918) بشكل كبير على تركيبة ولغة الرياضيات الحديثـــة. وبـــصفة خاصة فإن الاحتمالات قد تشكلت بصورة كبيرة على أساس مفاهيم ومـــصطلحات المجموعات.

المجموعة هي تجميع أعضاء مختلفة من أي نوع، فنتحدث مثلاً عن مجموعة من الناس أو مجموعة من الأرقام أو مجموعة من الكتب أو مجموعة مـــن الأشـــكال الهندسية ... الخ.

كما أننا نتحدث عن مجموعة الأعداد الصحيحة، أو مجموعة المحيطات أو مجموعة جميع المجاميع الناتجة عن دحرجة زهرتي نرد أو مجموعة محافظـــات الدولة وهكذا.

سنرمز للمجموعات بالحروف الأولى من الحروف الأبجدية مثـــل A، B، C، ... سنسمي مكونات المجموعة "عناصر"، وإذا اشتملت المجموعـــة A علـــى العنصر x، فإننا سنكتب $x \in A$ كرمز لانتماء العنصر x إلى المجموعة A، وأما إذا لم تشتمل A على العنصر x، فإننا سنكتب $x \notin A$ ، أي أن x ليست عنـــصراً من عناصر A.

وفي وصف العناصر التي تشملها المجموعة فإنه توجد ثلاث طرق :

(1) تذكر العناصر بالتحديـــد بين قوسين، فمـــثلاً : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وهـــي مجموعة تتكون من (أو تشتمل على) العناصر 1، 2، 3، 4، 5.

(2) توصف المجموعة بالكلمات فنقول مثلاً المجموعة A هي مجموعـــة الأعـــداد

الحقيقية بين الصفر والواحد وتشمل كلاً منهما.

(3) نكتب المجموعة بين قوسين كما في (1) ونذكر صفة مشتركة لجميع العناصر، فمثلاً، يمكننا كتابة المجموعة في (2) كالآتي: $A = \{ x \mid 0 \le x \le 1 \}$، وهـــي المجموعة A التي تشتمل على جميع العناصر x التي تحقق شرط أن x تأخـــذ القيم الحقيقية التي تقع بين الصفر والواحد بما في ذلك النهايتين. فالخط الرأسي الذي يتبع x يقرأ "بحيث أن" أو "بشرط أن" ثم يأتي بعده الشرط الـــذي تحققـــه العناصر.

سنفترض عدم تكرار أي عنصر من عناصر أي مجموعة.

المجموعة المحدودة (finite set) هي المجموعة التي تشتمل على عدد محدود من العناصر وإلا كانت مجموعة غير محدودة (infinite set) سواء كانت قابلة للعـــد (countable) أو غير قابلة للعد (uncountable).

ويمكن لمجموعة أن لا تشتمل على عناصر ونـــسميها فـــي هـــذه الحالـــة المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز ϕ .

مثال (C.1) : مجموعة الحروف المتحركة في اللغة الإنجليزية مجموعة محـــدودة لأنها تحتوي على خمسة عناصر وهي $A = \{ a, e, i, o, u \}$.

مثال (C.2) : مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مجموعة غير محدودة (قابلـــة للعد) وهي : $A = \{ 1, 2, 3, \ldots\} = \{x \mid$ عدد صحيح موجب $x \}$

مثال (C.3) : مجموعة الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد (شاملة النهـــايتين أو غير شاملة النهايتين) مجموعة غير محدودة (غير قابلة للعد) وهي :

$$A = \{ x \mid 0 \le x \le 1 \}$$

مثال (C.4) : المجموعة $B = \{ -2,2 \}$ هي نفس المجموعة $B = \{ x \mid x^2 = 4 \}$.

مثال (C.5) : إذا رمزنا لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز R ولمجموعة الأعـــداد

المركبة بالرمز C. فإن المجموعـــة $\phi=\{x\in R\,|\,x^2+1=0\}$ ،

بينما المجموعة $\{x\in C\,|\,x^2+1=0\}=\{-i,+i\},\ i=\sqrt{-1}$.

في أي مناقشة تتعلق بالمجموعات فإنه من الضروري تعريف مجموعة ثابتة مـــن العناصر تسمى **المجموعة الـــشاملة** (universal set) — أو المجموعة الكونية — تنحصر فيها المناقشة. فإذا تحددت المجموعة الشاملة، فإن أي مجموعة فـــي هـــذه المناقشة ذاتها تكون مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة — سنرمز للمجموعـــة الشاملة بالرمز U.

المجموعة الجزئية لمجموعة سنقول إن B مجموعة جزئية من مجموعة A ونكتب $B\subset A$ إذا كان كل عنصر من عناصر B هو عنصر من عناصر A.

تساوي المجموعـــات سنقول إن المجموعة A تـــساوي المجموعـــة B إذا كانـــت عناصر A متطابقة تماماً مع عناصر B (بغض النظر عن الترتيـــب)، ونكتـــب $A=B$، وفي هذه الحالة تكون $A\subset B$ ، $B\subset A$.

خاصيتان :

(1) المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية لأي مجموعـــة أخـــرى، أي أنـــه لأي مجموعة A تكون $\phi\subset A$.

(2) إذا تحددت المجموعة الشاملة U، وكانت A تمثل مجموعة بالنـــسبة إلـــى U فإن $A\subset U$.

مثال (C.6) : إذا مثلت U جميع الأعداد الحقيقية، وكانت

$A=\{x\in U\,|\,x^2+2x-3=0\}$ ،

$B=\{x\in U\,|\,(x-2)(x^2+2x-3)=0\}$ ، $C=\{-3,1,2\}$

فإن : $B=C$ ، $A\subset B$ ، $A\subset C$

ملحوظة هامة :

في الاحتمالات — كما هو موضح في البـــاب الأول — فـــإن "المجموعـــة

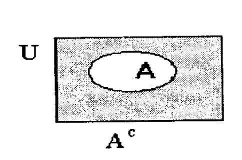
الشاملة" تسمى "فضاء العينة"، وأي "مجموعة جزئية" من المجموعة الشاملة تسمى "حدثاً" منسوباً إلى فضاء العينة، و"المجموعة الخالية" تـسمى "الحـدث مـستحيل الوقوع" ويرمز له أيضاً بالرمز ϕ . وكل العمليات على المجموعات تنطبق أيضاً على الأحداث.

العمليات على المجموعات :

تعريف (C.1) : إذا كانت A، B مجموعتان جزئيتان من المجموعة الـشاملة U، فإن :

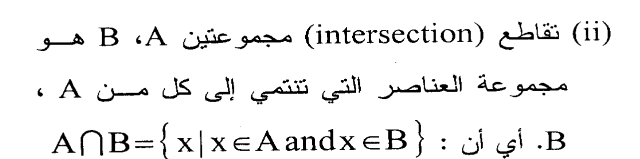
(i) متمم (complement) مجموعة A ونرمـز لـه بالرمز A^c هو مجموعة العناصر التي فـي U ولا تنتمي إلى A.

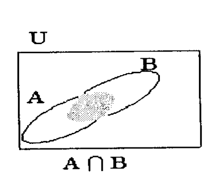
أي أن : $A^c = \{ x \in A \mid x \notin A \}$



A^c

(ii) تقاطع (intersection) مجموعتين A، B هـو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل مـن A ، B. أي أن : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ and } x \in B \}$

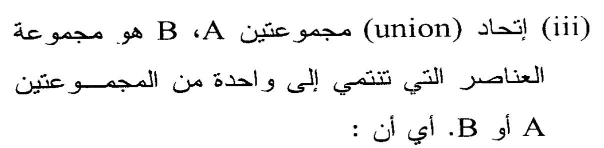


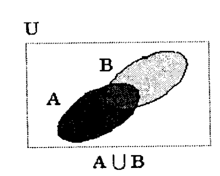


$A \cap B$

(iii) إتحاد (union) مجموعتين A، B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى واحدة من المجمـوعتين A أو B. أي أن :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \text{or} \ x \in B \}$$

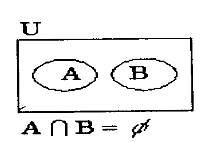




$A \cup B$

(iv) المجموعتان A، B تكونان متنافيتين إذا كان :

$$A \cap B = \phi$$



$A \cap B = \phi$

مثال (C.6): إفرض أن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ وأن $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{2, 4, 6, 8\}$، $C = \{1, 3, 5, 7\}$، فإن :

$A^c = \{5, 6, 7, 8\}$, $B^c = \{1, 3, 5, 7\}$, $C^c = \{2, 4, 6, 8\} = B$,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $B \cup C = U$,

$A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cap C = \{1. 3\}$, $B \cap C = \phi$,

$(A^c)^c = \{5, 6, 7, 8\}^c = \{1, 2, 3, 4\} = A$,

$(A \cup B)^c = \{5, 7\}$, $\{B \cap B\}^c = U$,

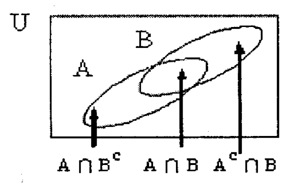
$(A \cap B) \cup C = \{2, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3\} = \{1, 3\}$,   وهكذا

نظرية (C.1) : إذا كانت المجموعتان A، B محدودتان وكان عدد عناصر A هو $n(A)$ وعدد عناصر B هو $n(B)$، فإن عدد عناصـــر $A \cup B$ هـــو $n(A \cup B)$ حيث :

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, متنافيتين A, B,

(2) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



البرهان :

تتكون المجموعة A (أنظر الشكل) من المجموعتين المتنافيتين $(A \cap B)$، $(A \cap B^c)$ ، لذلك فإن :

$$(C.1)\quad n(A) = n(A \cap B^c) + n(A \cap B) .$$

وكذلك فإن المجموعة B تتكون من المجموعتين المتنافيتين $(A \cap B)$، $(A^c \cap B)$، لذلك فإن :

$$(C.2)\quad n(B) = n(A^c \cap B) + n(A \cap B)$$

وبجمع (C.1)، (C.2) ثم طرح $n(A \cap B)$ من الطرفين، ينتج أن :

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cap B^c) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B)$$

ولكن (أنظر الشكل) : $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

لذلك فإن :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

مثال (C.7) : في مثال (C.6) نلاحظ أن $n(A) = 4$، $n(B) = 4$،

$n(A \cap B) = 2$ ، لذلك فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 2 = 6$$

كذلك فإن : $n(C) = 4$، $n(A \cap C) = 2$، $n(B \cap C) = \phi$

فيكون : $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) = 6$

ويكون : $n(B \cup C) = n(B) + n(C) = 8 = n(U)$

ويمكن تعميم نظرية (C.1) إلى ثلاث مجموعات كالآتي :

نظرية (C.2) : إذا كانت المجموعات A، B ، C محدودة، فإن :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

حيث $n(K)$ تمثل عدد عناصر المجموعة K.

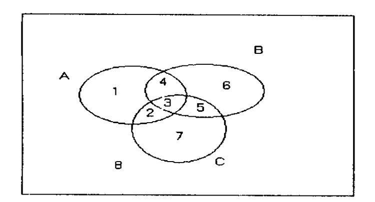
فإذا كانت A، B، C متنافية، فإن :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$n(A) = n(1) + n(2) + n(3) + n(4)$$

$$n(B) = n(3) + n(4) + n(5) + n(6)$$

$$n(C) = n(2) + n(3) + n(5) + n(7)$$



وبالجمع فإن :

$$(C.3)\quad n(A)+n(B)+n(C) = n(1)+2n(2)+2n(4)+2n(5)+n(6) +n(7)+3n(3).$$

ونلاحظ من الشكل أيضاً أن :

$$n(A \cap B) = n(3) + n(4)\,,\, n(A \cap C) = n(2) + n(3)$$

$$n(B \cap C) = n(3) + n(5)$$

لذلك فإن :

$$(C.4)\quad n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) = n(2)+n(4)+n(5)+3n(3)$$

ونظراً لأن :

$$(C.5)\quad n(A \cup B \cup C) = n(1) + n(2) + n(3) + n(4) + n(5) + n(6) + n(7)$$

كما أن :

$$(C.6) = n(3)\, n(A \cap B \cap C)$$

فبجمع (C.4)، (C.5)، فإن :

$$n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$$

$$= n(1) + 2\,n(2) + 2\,n(4) + 2\,n(5) + n(6) + n(7) + 4\,n(3)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C)\,,$$ (من C.3 ، C.6)

$$\Rightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

فإذا كانت المجموعات A، B، C متنافية، فإن :

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) = 0$$

فيكون :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

جبر المجموعات :

نظرية (C.3) : إذا كانت A، B، C أي مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U فإن :

(C.7) $A \cup \phi = A, \quad A \cup U = U \ , \ A \cap U = A, \ A \cap \phi = \phi \ ,$

(C.8) $A \cup A = A \ , \ A \cap A = A,$

(C.9) $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \phi \ , (A^c)^c = A,$

(C.10) $A \cup B = B \cup A \ , \ A \cap B = B \cap A,$

(C.11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

وتعميمها إلى k من المجموعات A_1، ...، A_k هو :

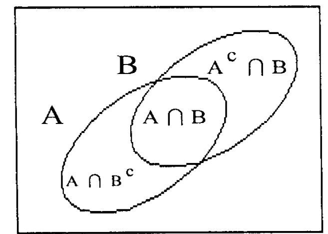
$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{k} (A \cup B_i), A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i).$$

(C.12) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \ , (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

وهي تسمى قوانين دي مورجان (De Morgan's laws) وتعميمها إلـــى k مـــن المجموعات A_1، ...، A_k هو

(C.13) $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c \ , \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c \ ,$

إذا كانت A، B مجموعتان جزئيتان من مجموعة شاملة U فإنه يمكن كتابة أي من A أو B كاتحاد مجموعتين متنافيتين كالآتي :



$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعات Cartesian Product of Sets

إذا كانت A، B مجموعتان جزئيتان من مجموعة شاملة U فإن حاصـــل الضرب الكارتيزي لهاتين المجموعتين ــ ويرمـــز لـــه بـــالرمز $A \times B$ ــ هـــو مجموعة العناصر التي تأخذ صورة الزوج المرتـــب (x, y) بحيـــث أن $x \in A$، $y \in B$. أي أن :

$$A \times B = \{ (x, y) | x \in A , y \in B \}$$

وعموماً فإنه إذا كانت A_1 ، ...، A_k تمثل مجموعات جزئية لمجموعة شاملة U، فإن حاصـــل الـــضرب الكـــارتيزي لهـــذه المجموعـــات، ويرمـــز لـــه بـــالرمز $A_1 \times ... \times A_k$ ، أو $\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ ، هو مجموعة جميع العناصر التي علـــى الـــصورة $(x_1, ..., x_2)$ حيث $x_1 \in A_1$ ، ...، $x_k \in A_k$. أي أن :

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} A_i = \{ (x_1, ..., x_k) | x_1 \in A_1 , ..., x_k \in A_k \}.$$

مثال (C.8) : إذا مثلت R مجموعة الأعداد الحقيقية (الخط المستقيم) فإن حاصـــل الضرب الكارتيزي $R \times R$ هو

$$R \times R = \{ (x, y) | x \in R , y \in R \},$$

تمثل مجموعة جميع الأزواج المرتبة (النقط) (x, y) الموجودة في المستوى.

وكذلك فإن حاصل الضرب الكارتيزي :

$$\underbrace{R \times R ... \times R}_{n} = \{ (x_1, ..., x_n) | x_1 \in R, ..., x_n \in R \}$$

يمثل مجموعة جميع النقط $(x_1, ..., x_n)$ المأخوذة في فراغ اقليدس ذي البعد n.

مثال (C.9) : إذا مثلت S_1 مجموعة كل ما ينتج من إلقاء قطعة من النقود مـــرة واحدة من صورة H وكتابة T فإن $S_1 = \{ H, T \}$، وإذا مثلت S_2 مجموعة كـــل ما ينتج من دحرجة زهرة نرد مرة واحدة، فإن $S_2 = \{ 1, 2, 3,4,5, 6 \}$ ونحصل على حواصل الضرب الكارتيزي الآتية :

$$S_1 \times S_1 = \{ H, T \} \times \{ H, T \} = \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \},$$

وتمثل هذه المجموعة كل ما ينتج من إلقاء قطعة من النقود مرتين (أو إلقاء قطعتين من النقود مرة واحدة).

$$S_1 \times S_2 = \{H, T\} \times \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$
$$= \{ (H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)$$
$$(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6) \}$$

وهي تمثل مجموعة كل ما ينتج من إلقاء قطعة من النقود مرة واحـــدة ودحرجـــة زهرة نرد مرة واحدة.

$$S_2 \times S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \times \{ H, T \}$$
$$= \{ (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (3, H), (3, T),$$
$$(4, H), (4, T), (5, H), (5, T), (6, H), (6, T) \}$$

وهي تمثل مجموعة كل ما ينتج من دحرجة زهرة نرد وإلقاء عملة (مرة واحد لكل منهما). لاحظ أن $S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1$

$$S_2 \times S_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \times \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$
$$= \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6) ,$$
$$(2, 1), (2, 2), \ldots, (2,6),$$
$$\vdots$$
$$(6, 1), (6, 2), \ldots, (6, 6) \}.$$

وهي تمثل مجموعة ما ينتج من دحرجة زهرة نرد مرتين (أو زهرتي نـــرد مـــرة واحدة).

نظرية (C.3) : إذا كانت A_1 ، ...، A_k مجموعات محدودة جزئية من مجموعة شاملة U بحيث أن عـــدد عناصر A_i هو $n(A_i)$ ، $(i = 1, \ldots, k)$، فإن عـــدد عناصر حاصل الضرب الكارتيزي $A_1 \times \ldots \times A_k$ هـــو $n(A_1)\ldots n(A_k)$. أي أن:

$$n\left(\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} n(A_i)$$

مثال (C.10) : في مثال (C.9) يكون :-

$$n(S_1 \times S_1) = n(S_1) . n(S_1) = 2. 2 = 4$$

وعدد عناصر $S_1 \times S_1$ **هو بالفعل 4 كما في مثال (A.9).**

$$n(S_1 \times S_2) = n(S_1) . n(S_2) = 2 . 6 = 12$$

$$n(S_2 \times S_1) = n(S_2) . n(S_1) = 6 . 2 = 12$$

$$n(S_2 \times S_2) = n(S_2) . n(S_2) = 6 . 6 = 36$$

ملحق (D)

ملخص القوانين الاحتمالية الهامة

أولا : دوال الكتلة الاحتمالية

(1) يخضع المتغير العشوائي X للتوزيع الاحتمالي المنتظم (المنفصل) للاحتمالات (discrete uniform) بالبارامتر N، ونكتب $X \sim Unif\{1,2,...,N\}$، إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

(D.1) $$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{N}, & x=1,2,...,N, \quad N=1,2,3,...\\ 0 & ,e.w.\end{cases}$$

• إذا كان $X \sim Unif\{1,...,N\}$ فإن :

المتوسط هو :

(D.2) $$E(X)=\frac{N+1}{2}$$

التباين هو :

(D.3) $$V(X)=\frac{1}{12}\left(N^2-1\right)$$

دالة توليد العزوم هي :

(D.4) $$M_X(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{jt}$$

(2) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع ذات الحدين للاحتمالات (binomial) بالبارامترين (n, p)، ونكتب $X \sim bin(n, p)$ ، إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

(D.5) $$p_X(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}, & x=0,1,...,n, \quad q=1-p,\\ 0 & ,e.w.\end{cases}$$

حيث $n=1,2,...$. $0<p<1$.

• إذا كان $X \sim bin(n,p)$ ، فإن :

المتوسط هو :
$$E(X) = np \quad (D.6)$$

التباين هو :
$$V(X) = npq \quad (D.7)$$

دالة توليد العزوم هي :
$$M_X(t) = (q + pe^t)^n \quad (D.8)$$

حالة خاصة

عندما $n = 1$ ، فإن المتغير العشوائي X **يخضع لتوزيع برنـــوللي للاحتمـــالات (Bernoulli) بالبارامتر** p ، ونكتب $X \sim Bern(p)$ ، إذا كانت دالة الكتلـــة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.9)\ p_X(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

• إذا كان $X \sim Bern(p)$ ، فإن :

المتوسط هو :
$$E(X) = p \quad (D.10)$$

التباين هو :
$$V(X) = pq \quad (D.11)$$

دالة توليد العزوم هي :
$$M_X(t) = q + pe^t \quad (D.12)$$

(3) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع بواسون للاحتمـــالات بالبـــارامتر λ ، ونكتب $X \sim \wp(\lambda)$. إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العـــشوائي X هي :

$$(D.13)\ p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & , x = 0,1,2,\ldots, (\lambda > 0) \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

• إذا كان $X \sim \wp(\lambda)$ ، فإن :

المتوسط هو :
$$E(X) = \lambda \quad (D.14)$$

التباين هو :
$$V(X) = \lambda \quad (D.15)$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.16)\quad M_X(t)=\exp\left[\lambda\,(e^t-1)\right]$$

(4) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع ذات الحدين السالب للاحتمالات (negative binomial) بالبارامترين (r,p)، ونكتب $X \sim N\,bin\,(r,p)$

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.17)\; p_X(x)=\begin{cases}\dbinom{r+x-1}{x}p^r q^x, & x=0,1,2,\ldots,\quad q=1-p,\\ 0 & ,\ e.w.\end{cases}$$

$r>0,\,0<p<1.$

- إذا كان $X \sim N\,bin\,(r,p)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.18)\quad E(X)=r\,q/p$$

التباين هو :

$$(D.19)\quad V(X)=r\,q/p^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.20)\quad M_X(t)=\left[\frac{p}{1-q\,e^t}\right]^r$$

حالة خاصة

عندما r = 1 فإن المتغير العشوائي X **يخضع للتوزيع الهندسي للاحتمالات بالبارامتر** p ونكتب $X \sim Geom\,(p)$ إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.21)\quad p_X(x)=\begin{cases}pq^{x-1} & ,\ x=1,2,\ldots,\ (0<p<1,\,q=1-p)\\ 0 & ,\ e.w.\end{cases}$$

(لاحظ أنه عندما r = 1 في كتلة ذات الحدين السالب فإن $p_Y(y)=pq^y,\ y=0,1,2,\ldots$ وباستخدام التحويل $X=Y+1$ فإننا نحصل علي صورة الكتلة $p_X(x)$ على المجال المبين) .

• إذا كان $X \sim Geom(p)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$E(X)=q/p \quad (D.22)$$

التباين هو :

$$V(X)=q/p^2 \quad (D.23)$$

دالة توليد العزوم هي :

$$M_X(t)=p/(1-q\,e^t) \quad (D.24)$$

(5) يخضع المتغير العشوائي X للتوزيع فوق الهندسي للاحتمالات (hypregeometric) بالبارامترات N, n, p، ونكتب $X \sim HG(N, n, p)$،

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.25)\; p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x=0,1,\ldots,n,\; \left(N=1,2,\ldots,n=1,2,\ldots N,\; p=0,\dfrac{1}{N},\dfrac{2}{N},\ldots,1, q=1-p\right) \\ 0 & ,\ e.w. \end{cases}$$

إذا كان $X \sim HG(N, n, p)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$E(X)=np \quad (D.26)$$

التباين هو :

$$V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad (D.27)$$

دالة توليد العزوم تحقق معادلة تفاضلية علي الصورة:

$$(D.28)\; (1-e^t)\left\{\frac{d^2M}{dt^2}+(n+Np)\frac{dM}{dt}+nNpM\right\}-NnpM+N\frac{dM}{dt}=0,$$

حيث $M \equiv M_X(t)$ هي دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X .

(6) يخضع المتغير العشوائي X للتوزيع اللوغاريتمي (logarithmic) للاحتمالات بالبارامتر θ، ونكتب $X \sim Log(\theta)$ إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.29)\ p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a\theta^x}{x}, & x = 1,2,\ldots,\quad 0<\theta<1,\ a = -1/\ln(1-\theta). \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

- إذا كان $X \sim Log(\theta)$، فإن :

المتوسط هو :
$$(D.30)\quad E(X) = a\theta/(1-\theta)$$

التباين هو :
$$(D.31)\quad V(X) = a\theta(1-a\theta)/(1-\theta)^2$$

دالة توليد العزوم هي :
$$(D.32)\quad M_X(t) = \ln(1-\theta e^t)/\ln(1-\theta)$$

ثانيا : دوال الكثافة الاحتمالية

(1) يخضع المتغير العشوائي للتوزيع الاحتمالي المنتظم (المتصل) [uniform (continuous)] على الفترة (a,b)، ونكتب $X \sim Unif(a,b)$ إذا كانت الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

(a , b عددان حقيقيان)

$$(D.33)\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

- إذا كان $X \sim Unif(a,b)$ ، فإن :

المتوسط هو :
$$(D.34)\quad E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$$

التباين هو :
$$(D.35)\quad V(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.36)\quad M_X(t) = (e^{tb} - e^{ta}) \,/\, [t(b-a)]$$

(2) يخضع المتغير العشوائي X للتوزيع المعتدل (normal) بالبـــارامترين (μ, σ^2)، ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.37)\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0) .$$

- إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.38)\quad E(X) = \mu$$

التباين هو :

$$(D.39)\quad V(X) = \sigma^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.40)\quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

(3) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع اللوغاريتم المعتـــدل (lognormal) بالبارامترين (μ, σ^2)، ونكتب $X \sim \log N(\mu, \sigma^2)$ أو $X \sim \wedge(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.41)\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} & , x > 0, (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0) , \\ 0 & ,e.w. \end{cases}$$

- إذا كان $X \sim \wedge(\mu, \sigma^2)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.42)\quad E(X) = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$$

التباين هو :

$$(D.43)\quad V(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\left[e^{\sigma^2} - 1\right]$$

دالة توليد العزوم هي:

$$(D.44)\quad M_X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\exp\left[j\mu+\frac{j^2\sigma^2}{2}\right]$$

(4) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع جاوس العكسي (Inverse Gaussian) بالبارامترين (μ,λ) ، ونكتب $X\sim IG(\mu,\lambda)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.45)\; f_X(x)=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right] & ,x>0,(\mu>0,\lambda>0)\;,\\ 0 & ,e.w.\end{cases}$$

- إذا كان $X\sim IG(\mu,\lambda)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.46)\quad E(X)=\mu$$

التباين هو :

$$(D.47)\quad V(X)=\mu^3/\lambda$$

دالة توليد العزوم هي:

$$(D.48)\quad M_X(t)=\exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left\{1-\left(1-\frac{2\mu^2 t}{\lambda}\right)^{1/2}\right\}\right]$$

(5) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع كوشي (Cauchy) بالبارامترين (α,β) ، ونكتب $X\sim Cauchy(\alpha,\beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.49)\; f_X(x)=\frac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]},-\infty<x<\infty,-\infty<\alpha<\infty,\beta>0.$$

توزيع كوشي ليس له دالة توليد عزوم ولا عزوم (من أي رتبة) ، وأمـــا دالتـــه المميزة فهي :

$$(D.50)\quad \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \exp\left[it\alpha - |t|\beta\right], \quad (i = \sqrt{-1}).$$

(6) يخضع المتغير العـــشوائي X لتوزيـــع جامـــا (gamma) بالبـــارامترين (α, β) ، ونكتب $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافـــة الاحتماليـــة للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.51)\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , x > 0, \ (\alpha > 0, \beta > 0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

• إذا كان $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ ، فإن :

المتوسط هو : $$(D.52)\quad E(X) = \alpha / \beta$$

التباين هو : $$(D.53)\quad V(X) = \alpha / \beta^2$$

دالة توليد العزوم هي : $$(D.54)\quad M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

ملحوظة : توجد صورة أخري لكثافة توزيع جاما نحصل عليها باستبدال البارامتر β في (D.51) بالبارامتر $\dfrac{1}{\beta}$ ، فتصبح الكثافة في هذه الحالة علي الصورة

$$(D.51)'\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , x > 0, \ (\alpha > 0, \beta > 0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

وتصبح الصيغ المناظرة للمتوسط والتباين ودالة توليد العزوم في هذه الحالة هي :

المتوسط هو : $$(D.52)'\quad E(X) = \alpha\beta$$

التباين هو :

$$(D.53)' \quad V(X)=\alpha\beta^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.54)' \quad M_X(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$$

حالات خاصة :

(i) عندما $\alpha = 1$ ، أي عندما $X \sim gamma(1, \beta)$ ، فإن الكثافة (D.51) تصبح علي الصورة :

$$(D.55)\ f_X(x)=\begin{cases} \beta e^{-\beta x} & , x>0\ ,\ (\beta>0), \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

ونقول في هذه الحالة إن **المتغير العشوائي** X **يخضع للتوزيع الأسي (exponential) للاحتمالات بالبارامتر** β ونكتب ($X \sim exp(\beta)$) .

- إذا كان $X \sim exp(\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.56) \quad E(X)=1/\beta$$

التباين هو :

$$(D.57) \quad V(X)=1/\beta^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.58) \quad M_X(t)=\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-1}$$

(ii) عندما $\alpha=\frac{k}{2}$ ، $\beta=\frac{1}{2}$ ، أي عندما $X \sim gamma\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$ ، فإن الكثافة الاحتمالية (B.51) تصبح علي الصورة :

$$(B.59)\ f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{k/2}}\, x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x/2} & , x.0, \\ 0 & , e.w. \end{cases}$$

حيث k عدد صحيح موجب يسمي "درجات الحرية" **(degrees of freedom)**.

نقول في هذه الحالة إن **المتغير العشوائي** X **يخضع لتوزيع** χ^2 **بـ** k **من درجات الحرية** ، ونكتب $X \sim \chi^2(k)$.

- إذا كان $X \sim \chi^2(k)$ ، فإن :

المتوسط هو : $$(D.60) \quad E(X) = k$$

التباين هو : $$(D.61) \quad V(X) = 2k$$

دالة توليد العزوم هي : $$(D.62) \quad M_X(t) = (1-2t)^{-k/2}$$

(7) يخضع المتغير العشوائي X **لتوزيع باريتو (Pareto) بالبارامترين** (α, β) ، ونكتب $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.63) \quad f_X(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{\alpha} / x^{\alpha+1} & , \; x > \beta \; , \; (\alpha > 0 \, , \beta > 0) \; , \\ 0 & , \; e.w. \end{cases}$$

ملحوظة : هناك أنواع أخري لتوزيع باريتو، وتطلق الكثافة (D.63) علي توزيع باريتو من النوع الأول.

- إذا كان $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$ ، فإن :

المتوسط هو : $$(D.64) \quad E(X) = \alpha\beta / (\alpha - 1) \; , \alpha > 1$$

التباين هو : $$(D.65) \quad V(X) = \alpha\beta^2 / \left[(\alpha-1)^2 (\alpha-2) \right] \; , \; \alpha > 2$$

دالة توليد العزوم هي: $$(D.66) \quad M_X(t) = \sum_{j!}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \frac{\alpha\beta^j}{(\alpha - j)} \; , \; \alpha > j$$

(8) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيـــع وايبـــل (Weibull) بالبـــارامترين (α,β) ، ونكتب $X\sim W(\alpha,\beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$\text{(D.67)}\quad f_X(x)=\begin{cases}\beta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}} & , x>0,\ (\alpha>0,\beta>0)\ ,\\ 0 & , \text{e.w.}\end{cases}$$

- إذا كان $X\sim W(\alpha,\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$\text{(D.68)}\quad E(X)=\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)/\alpha\beta^{1/\alpha}$$

التباين هو :

$$\text{(D.69)}\quad V(X)=\left[2\alpha\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]/\alpha^{2}\beta^{2/\alpha}$$

دالة توليد العزوم هي :

$$\text{(D.70)}\quad M_X(t)=\sum_{j!}^{\infty}\frac{t^{j}}{j!}\frac{j\Gamma\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{\alpha\beta^{j/\alpha}}$$

حالات خاصة :

(i) عندما $\alpha=1$ ، تصبح (D.67) علي صورة الكثافـــة الأســـية (D.55). أي أن $X\sim \exp(\beta)\Leftrightarrow X\sim W(1,\beta)$.

(ii) عندما $\alpha=2$ ، تصبح **(D.67)**

$$\text{(D.71)}\quad f_X(x)=\begin{cases}2\beta x e^{-\beta x^{2}} & , x>0,\ (\beta>0),\\ 0 & , \text{e.w.}\end{cases}$$

وهي **دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي (Rayleigh) بالبارامتر** β، ونكتب $X \sim Ray(\beta)$.

- إذا كان $X \sim Ray(\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.72) \quad E(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

التباين هو :

$$(D.73) \quad V(X) = (4 - \pi)/4\beta$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.74) \quad M_X(t) = \sum_{j!}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \frac{j\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{2\beta^{j/2}}$$

(9) يخضع المتغير العشوائي X **لتوزيع القيمة المتطرفة (extreme value) بالبارامترين** (α, β)، ونكتب $X \sim EV(\alpha, \beta)$، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.75) \quad f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta} \exp\left[-e^{-(x-\alpha)/\beta}\right], -\infty < x < \infty,$$

حيث $-\infty < \alpha < \infty, \ \beta > 0$.

- إذا كان $X \sim EV(\alpha, \beta)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$(D.76) \quad E(X) = \alpha + \gamma\beta \cong \alpha + (0.57722)\beta$$

حيث $\gamma \cong 0.57722$ هو ثابت أويلر

التباين هو :

$$(D.77) \quad V(X) = \frac{1}{6}\pi^2\beta^2 \simeq (1.64493)\beta^2$$

دالة توليد العزوم هي :

$$(D.78) \quad M_X(t) = e^{\alpha t}\Gamma(1 - \beta t), \beta|t| > 1$$

(10) يخضع المتغير العشوائي X للتوزيع اللوجستيكي (logistic) بالبارامترين (α,β)، ونكتب $X \sim \text{logistic}(\alpha,\beta)$، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$\text{(D.79)}\ f_X(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]/\beta\left[\ +\exp\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]\right]^2, -\infty<\alpha<\infty,$$

حيث $\beta>0$, $-\infty<\alpha<\infty$.

- إذا كان $X \sim \text{logistic}(\alpha,\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو : $\text{(D.80)}\quad E(X)=\alpha$

التباين هو : $\text{(D.81)}\quad V(X)=\pi^2\beta^2/3$

دالة توليد العزوم هي : $\text{(D.82)}\quad M_X(t) = e^{\alpha t}\,\Gamma(1-\beta t)\,\Gamma(1+\beta t),\ \beta|t|<1$

(11) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع لابلاس (الأسي المزدوج) Laplace (double exponential) بالبارامترين (α,β)، ونكتب $X \sim \text{Lap}(\alpha,\beta)$ أو $X \sim \text{DExp}(\alpha,\beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$\text{(D.83)}\ f_X(x)=\frac{1}{2\beta}e^{-|x-\alpha|/\beta}, -\infty<x<\infty, (-\infty<\alpha<\infty, \beta>0).$$

- إذا كان $X \sim \text{Lap}(\alpha,\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو : $\text{(D.84)}\quad E(X)=\alpha$

التباين هو : $\text{(D.85)}\quad V(X)=2\beta^2$

دالة توليد العزوم هي : (D.86) $M_X(t) = e^{\alpha t}(1-\beta^2 t^2)^{-1}$

(12) يخضع المتغير العشوائي X لتوزيع بيتا (beta) بالبارامترين (α,β)،

ونكتب $X \sim beta(\alpha,\beta)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$(D.87)\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , 0<x<1, (\alpha>0, \beta>0), \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

حيث $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

- إذا كان $X \sim beta(\alpha,\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو : (D.88) $E(X) = \alpha/(\alpha+\beta)$

التباين هو : (D.89) $V(X) = \alpha\beta / \left[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)\right]$

دالة توليد العزوم هي: (D.90) $M_X(t) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{t^j}{j!} \dfrac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+\beta+j)}$

حالة خاصة :

عندما $\alpha = 1$ ، $\beta = 1$ ، أي عندما $X \sim beta(1,1)$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية **(D.87)** تصبح علي الصورة :

$$(D.91)\quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & , 0<x<1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم علي الفترة $(0,1)$.

(13) يخضـــع المتغيـــر العشوائـــي X لتوزيع بير (Burr) من النوع الثاني عشر بالبارامترين (α,β)، ونكتـــب $X \sim \text{Burr XII}(\alpha,\beta)$ ، إذا كانـــت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$\text{(D.92)}\quad f_X(x)=\begin{cases}\beta\alpha x^{\alpha-1}(1+x^{\alpha})^{-\beta-1}, & x>0,(\alpha>0,\beta>0),\\ 0 & , \text{ e.w.}\end{cases}$$

إذا كان $X \sim \text{Burr XII}(\alpha,\beta)$ ، فإن :

المتوسط هو :

$$\text{(D.93)}\quad E(X)=\beta B\left(1+\frac{1}{\alpha},\beta-\frac{1}{\alpha}\right),\alpha\beta>1$$

التباين هو :

$$\text{(D.94)}\quad V(X)=\beta B\left(1+\frac{2}{\alpha},\beta-\frac{2}{\alpha}\right)-\beta^2B^2\left(1+\frac{1}{\alpha},\beta-\frac{1}{\alpha}\right),\alpha\beta>2$$

دالة توليد العزوم هي:

$$\text{(D.95)}\quad M_X(t)=\beta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}B\left(1+\frac{j}{\alpha},\beta-\frac{j}{\alpha}\right),\alpha\beta>j$$

حالة خاصة :

عندما $\alpha = \mathbf{1}$ ، فإن دالة الكثافة الاحتمالية (D.92) تصبح علي الصورة :

$$\text{(D.96)}\quad f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{(1+x)^{\beta+1}} & , x>0 , (\beta>0),\\ 0 & , \text{ e.w.}\end{cases}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا من النوع الثاني **(beta of the second kind)** ببارامتر واحد هو β ، ونكتب $X \sim beta\,II(\beta)$ ، ويكون في هذه الحالة :

- المتوسط هو : $\text{(D.97)}\quad E(X)=1/(\beta-1)\ ,\ \beta>1$

التباين هو :

$$\text{(D.98)} \quad V(X) = \beta / \left[(\beta-1)^2 (\beta-2) \right] \ , \beta > 2$$

دالة توليد العزوم هي:

$$\text{(D.99)} \quad M_X(t) = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} B(j+1, \beta - j) , \beta > j$$

يخضع المتغير العشوائي **X** لتوزيع بيتا من النوع الثاني بالبارامترين (α, β) ، ونكتب $X \sim \text{beta II}(\alpha, \beta)$ ، إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية [وهـــي تعمـــيم الكثافة **(D. 96)**] للمتغير العشوائي X علي الصورة :

$$\text{(D.100)} \ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha+\beta)} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} , x>0, (\alpha>0, \beta>0), \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \ \text{e.w.} \end{cases}$$

ملحق (E)

الجداول

ملحق (E)

الجـــداول

جدول I : معاملات ذات الحدين

	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	1	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

جدول II : احتمالات ذات الحدين التجميعية (n=5)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	P
0.01	0.0490100	0.0009801	0.0000099	0.0000000	0.0000000	0.01
0.02	0.0960792	0.0038424	0.0000776	0.0000008	0.0000000	0.02
0.03	0.1412660	0.0084721	0.0002580	0.0000040	0.0000000	0.03
0.04	0.1846273	0.0147580	0.0006022	0.0000124	0.0000001	0.04
0.05	0.2262191	0.0225925	0.0011581	0.0000300	0.0000003	0.05
0.06	0.2660960	0.0318713	0.0019703	0.0000617	0.0000008	0.06
0.07	0.3043116	0.0424934	0.0030799	0.0001133	0.0000017	0.07
0.08	0.3409185	0.0543613	0.0045253	0.0001917	0.0000033	0.08
0.09	0.3759679	0.0673805	0.0063413	0.0003044	0.0000059	0.09
0.10	0.4095100	0.0814600	0.0085600	0.0004600	0.0000100	0.10
0.11	0.4415941	0.0965117	0.0112105	0.0006676	0.0000161	0.11
0.12	0.4722681	0.1124509	0.0143189	0.0009373	0.0000249	0.12
0.13	0.5015791	0.1291956	0.0179086	0.0012795	0.0000371	0.13
0.14	0.5295730	0.1466673	0.0220003	0.0017057	0.0000538	0.14
0.15	0.5562947	0.1647900	0.0266119	0.0022275	0.0000759	0.15
0.16	0.5817881	0.1834910	0.0317587	0.0028574	0.0001049	0.16
0.17	0.6060959	0.2027002	0.0374538	0.0036081	0.0001420	0.17
0.18	0.6292602	0.2223506	0.0437073	0.0044930	0.0001890	0.18
0.19	0.6513216	0.2423777	0.0505275	0.0055256	0.0002476	0.19
0.20	0.6723200	0.2627200	0.0579200	0.0067200	0.0003200	0.20
0.21	0.6922944	0.2833185	0.0658883	0.0080904	0.0004084	0.21
0.22	0.7112826	0.3041169	0.0744338	0.0096513	0.0005154	0.22
0.23	0.7293216	0.3250616	0.0835557	0.0114175	0.0006436	0.23
0.24	0.7464475	0.3461014	0.0932512	0.0134038	0.0007963	0.24
0.25	0.7626953	0.3671875	0.1035156	0.0156250	0.0009766	0.25
0.26	0.7780993	0.3882738	0.1143424	0.0180962	0.0011881	0.26
0.27	0.7926928	0.4093166	0.1257232	0.0208325	0.0014349	0.27
0.28	0.8065082	0.4302743	0.1376478	0.0238487	0.0017210	0.28
0.29	0.8195771	0.4511077	0.1501045	0.0271596	0.0020511	0.29
0.30	0.8319300	0.4717800	0.1630800	0.0307800	0.0024300	0.30
0.31	0.8435969	0.4922565	0.1765593	0.0347244	0.0028629	0.31
0.32	0.8546066	0.5125046	0.1905263	0.0390070	0.0033554	0.32
0.33	0.8649875	0.5324940	0.2049631	0.0436419	0.0039135	0.33
0.34	0.8747667	0.5521962	0.2198509	0.0486426	0.0045435	0.34
0.35	0.8839709	0.5715850	0.2351694	0.0540225	0.0052522	0.35
0.36	0.8926258	0.5906359	0.2508973	0.0597943	0.0060466	0.36
0.37	0.9007563	0.6093266	0.2670122	0.0659705	0.0069344	0.37
0.38	0.9083867	0.6276363	0.2834907	0.0725627	0.0079235	0.38
0.39	0.9155404	0.6455465	0.3003084	0.0795824	0.0090224	0.39
0.40	0.9222400	0.6630400	0.3174400	0.0870400	0.0102400	0.40
0.41	0.9285076	0.6801017	0.3348596	0.0949456	0.0115856	0.41
0.42	0.9343643	0.6967179	0.3525403	0.1033083	0.0130691	0.42
0.43	0.9398308	0.7128768	0.3704549	0.1121367	0.0147008	0.43
0.44	0.9449268	0.7285679	0.3885753	0.1214383	0.0164916	0.44
0.45	0.9496716	0.7437825	0.4068731	0.1312200	0.0184528	0.45
0.46	0.9540835	0.7585132	0.4253194	0.1414876	0.0205963	0.46
0.47	0.9581805	0.7727541	0.4438849	0.1522460	0.0229345	0.47
0.48	0.9619796	0.7865008	0.4625400	0.1634992	0.0254804	0.48
0.49	0.9654975	0.7997501	0.4812550	0.1752500	0.0282475	0.49
0.50	0.9687500	0.8125000	0.5000000	0.1875000	0.0312500	0.50

جدول **II** : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (**n=8**)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	P
0.01	0.0772553	0.0026901	0.0000539	0.0000007	0.0000000	0.01
0.02	0.1492370	0.0103369	0.0004155	0.0000105	0.0000002	0.02
0.03	0.2162566	0.0223408	0.0013499	0.0000515	0.0000013	0.03
0.04	0.2786104	0.0381472	0.0030797	0.0001574	0.0000052	0.04
0.05	0.3365796	0.0572447	0.0057882	0.0003718	0.0000154	0.05
0.06	0.3904311	0.0791618	0.0096229	0.0007456	0.0000373	0.06
0.07	0.4404182	0.1034657	0.0146986	0.0013359	0.0000786	0.07
0.08	0.4867811	0.1297593	0.0211005	0.0022033	0.0001493	0.08
0.09	0.5297475	0.1576795	0.0288868	0.0034113	0.0002619	0.09
0.10	0.5695328	0.1868953	0.0380918	0.0050244	0.0004317	0.10
0.11	0.6063411	0.2171054	0.0487281	0.0071068	0.0006765	0.11
0.12	0.6403655	0.2480369	0.0607892	0.0097216	0.0010169	0.12
0.13	0.6717883	0.2794433	0.0742514	0.0129297	0.0014759	0.13
0.14	0.7007821	0.3111029	0.0890764	0.0167887	0.0020790	0.14
0.15	0.7275095	0.3428170	0.1052128	0.0213525	0.0028539	0.15
0.16	0.7521241	0.3744085	0.1225980	0.0266703	0.0038303	0.16
0.17	0.7747708	0.4057205	0.1411603	0.0327863	0.0050399	0.17
0.18	0.7955859	0.4366148	0.1608200	0.0397393	0.0065160	0.18
0.19	0.8146980	0.4669707	0.1814910	0.0475622	0.0082929	0.19
0.20	0.8322278	0.4966835	0.2030822	0.0562816	0.0104064	0.20
0.21	0.8482891	0.5256634	0.2254991	0.0659180	0.0128926	0.21
0.22	0.8629886	0.5538346	0.2486441	0.0764853	0.0157883	0.22
0.23	0.8764264	0.5811335	0.2724183	0.0879910	0.0191302	0.23
0.24	0.8886965	0.6075088	0.2967223	0.1004362	0.0229548	0.24
0.25	0.8998871	0.6329193	0.3214569	0.1138153	0.0272980	0.25
0.26	0.9100805	0.6573339	0.3465239	0.1281168	0.0321948	0.26
0.27	0.9193540	0.6807302	0.3718268	0.1433229	0.0376789	0.27
0.28	0.9277796	0.7030939	0.3972716	0.1594099	0.0437826	0.28
0.29	0.9354246	0.7244179	0.4227673	0.1763486	0.0505362	0.29
0.30	0.9423520	0.7447017	0.4482262	0.1941044	0.0579677	0.30
0.31	0.9486202	0.7639506	0.4735644	0.2126377	0.0661027	0.31
0.32	0.9542837	0.7821752	0.4987023	0.2319043	0.0749644	0.32
0.33	0.9593932	0.7993904	0.5235647	0.2518558	0.0845724	0.33
0.34	0.9639959	0.8156156	0.5480813	0.2724399	0.0949435	0.34
0.35	0.9681355	0.8308731	0.5721863	0.2936006	0.1060909	0.35
0.36	0.9718525	0.8451888	0.5958195	0.3152791	0.1180242	0.36
0.37	0.9751844	0.8585906	0.6189255	0.3374141	0.1307490	0.37
0.38	0.9781660	0.8711089	0.6414542	0.3599420	0.1442673	0.38
0.39	0.9808293	0.8827757	0.6633607	0.3827973	0.1585766	0.39
0.40	0.9832038	0.8936243	0.6846054	0.4059136	0.1736704	0.40
0.41	0.9853170	0.9036892	0.7051539	0.4292234	0.1895380	0.41
0.42	0.9871937	0.9130054	0.7249765	0.4526588	0.2061644	0.42
0.43	0.9888571	0.9216086	0.7440490	0.4761522	0.2235301	0.43
0.44	0.9903283	0.9295345	0.7623517	0.4996359	0.2416115	0.44
0.45	0.9916266	0.9368189	0.7798697	0.5230437	0.2603807	0.45
0.46	0.9927698	0.9434974	0.7965925	0.5463101	0.2798056	0.46
0.47	0.9937740	0.9496049	0.8125139	0.5693713	0.2998501	0.47
0.48	0.9946540	0.9551761	0.8276319	0.5921658	0.3204741	0.48
0.49	0.9954232	0.9602447	0.8419484	0.6146339	0.3416336	0.49
0.50	0.9960938	0.9648438	0.8554688	0.6367188	0.3632813	0.50

جدول II : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=8)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=6	x=7	x=8	P
0.01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.02
0.03	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.03
0.04	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.04
0.05	0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.05
0.06	0.0000012	0.0000000	0.0000000	0.06
0.07	0.0000029	0.0000001	0.0000000	0.07
0.08	0.0000064	0.0000002	0.0000000	0.08
0.09	0.0000127	0.0000004	0.0000000	0.09
0.10	0.0000234	0.0000007	0.0000000	0.10
0.11	0.0000407	0.0000014	0.0000000	0.11
0.12	0.0000673	0.0000026	0.0000000	0.12
0.13	0.0001067	0.0000044	0.0000001	0.13
0.14	0.0001633	0.0000074	0.0000001	0.14
0.15	0.0002423	0.0000119	0.0000003	0.15
0.16	0.0003499	0.0000185	0.0000004	0.16
0.17	0.0004935	0.0000279	0.0000007	0.17
0.18	0.0006816	0.0000413	0.0000011	0.18
0.19	0.0009239	0.0000596	0.0000017	0.19
0.20	0.0012314	0.0000845	0.0000026	0.20
0.21	0.0016164	0.0001176	0.0000038	0.21
0.22	0.0020926	0.0001611	0.0000055	0.22
0.23	0.0026751	0.0002176	0.0000078	0.23
0.24	0.0033805	0.0002899	0.0000110	0.24
0.25	0.0042267	0.0003815	0.0000153	0.25
0.26	0.0052329	0.0004964	0.0000209	0.26
0.27	0.0064199	0.0006391	0.0000282	0.27
0.28	0.0078097	0.0008150	0.0000378	0.28
0.29	0.0094256	0.0010298	0.0000500	0.29
0.30	0.0112922	0.0012903	0.0000656	0.30
0.31	0.0134351	0.0016040	0.0000853	0.31
0.32	0.0158811	0.0019791	0.0001100	0.32
0.33	0.0186577	0.0024250	0.0001406	0.33
0.34	0.0217935	0.0029518	0.0001786	0.34
0.35	0.0253175	0.0035708	0.0002252	0.35
0.36	0.0292594	0.0042944	0.0002821	0.36
0.37	0.0336492	0.0051358	0.0003512	0.37
0.38	0.0385171	0.0061098	0.0004348	0.38
0.39	0.0438932	0.0072321	0.0005352	0.39
0.40	0.0498074	0.0085197	0.0006554	0.40
0.41	0.0562892	0.0099909	0.0007985	0.41
0.42	0.0633676	0.0116653	0.0009683	0.42
0.43	0.0710705	0.0135637	0.0011688	0.43
0.44	0.0794247	0.0157085	0.0014048	0.44
0.45	0.0884559	0.0181230	0.0016815	0.45
0.46	0.0981878	0.0208321	0.0020048	0.46
0.47	0.1086426	0.0238619	0.0023811	0.47
0.48	0.1198402	0.0272400	0.0028179	0.48
0.49	0.1317981	0.0309948	0.0033233	0.49
0.50	0.1445313	0.0351563	0.0039063	0.50

جدول**II** : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=10)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	P
0.01	0.0956179	0.0042662	0.0001138	0.0000020	0.0000000	0.01
0.02	0.1829272	0.0161776	0.0008639	0.0000305	0.0000007	0.02
0.03	0.2625759	0.0345066	0.0027649	0.0001471	0.0000054	0.03
0.04	0.3351674	0.0581538	0.0062137	0.0004426	0.0000218	0.04
0.05	0.4012631	0.0861384	0.0115036	0.0010285	0.0000637	0.05
0.06	0.4613849	0.1175880	0.0188378	0.0020293	0.0001517	0.06
0.07	0.5160177	0.1517299	0.0283421	0.0035761	0.0003139	0.07
0.08	0.5656115	0.1878825	0.0400754	0.0058013	0.0005857	0.08
0.09	0.6105839	0.2254471	0.0540400	0.0088338	0.0010096	0.09
0.10	0.6513216	0.2639011	0.0701908	0.0127952	0.0016349	0.10
0.11	0.6881828	0.3027908	0.0884435	0.0177972	0.0025170	0.11
0.12	0.7214990	0.3417250	0.1086818	0.0239388	0.0037161	0.12
0.13	0.7515766	0.3803692	0.1307642	0.0313048	0.0052967	0.13
0.14	0.7786984	0.4184400	0.1545298	0.0399642	0.0073263	0.14
0.15	0.8031256	0.4557002	0.1798035	0.0499698	0.0098741	0.15
0.16	0.8250988	0.4919536	0.2064005	0.0613577	0.0130101	0.16
0.17	0.8448396	0.5270412	0.2341305	0.0741472	0.0168038	0.17
0.18	0.8625520	0.5608368	0.2628010	0.0883411	0.0213229	0.18
0.19	0.8784233	0.5932435	0.2922204	0.1039261	0.0266325	0.19
0.20	0.8926258	0.6241904	0.3222005	0.1208739	0.0327935	0.20
0.21	0.9053172	0.6536289	0.3525586	0.1391418	0.0398624	0.21
0.22	0.9166422	0.6815306	0.3831197	0.1586739	0.0478897	0.22
0.23	0.9267332	0.7078843	0.4137173	0.1794024	0.0569196	0.23
0.24	0.9357111	0.7326936	0.4441949	0.2012487	0.0669890	0.24
0.25	0.9436865	0.7559748	0.4744072	0.2241249	0.0781269	0.25
0.26	0.9507601	0.7777550	0.5042200	0.2479349	0.0903542	0.26
0.27	0.9570237	0.7980705	0.5335112	0.2725761	0.1036831	0.27
0.28	0.9625609	0.8169646	0.5621710	0.2979405	0.1181171	0.28
0.29	0.9674476	0.8344869	0.5901015	0.3239164	0.1336503	0.29
0.30	0.9717525	0.8506917	0.6172172	0.3503893	0.1502683	0.30
0.31	0.9755381	0.8656366	0.6434445	0.3772433	0.1679475	0.31
0.32	0.9788608	0.8793821	0.6687212	0.4043626	0.1866554	0.32
0.33	0.9817716	0.8919901	0.6929966	0.4316320	0.2063514	0.33
0.34	0.9843166	0.9035235	0.7162304	0.4589388	0.2269866	0.34
0.35	0.9865373	0.9140456	0.7383926	0.4861730	0.2485045	0.35
0.36	0.9884708	0.9236190	0.7594627	0.5132284	0.2708415	0.36
0.37	0.9901507	0.9323056	0.7794292	0.5400038	0.2939277	0.37
0.38	0.9916070	0.9401661	0.7982887	0.5664030	0.3176870	0.38
0.39	0.9928666	0.9472594	0.8160453	0.5923361	0.3420385	0.39
0.40	0.9939534	0.9536426	0.8327102	0.6177194	0.3668967	0.40
0.41	0.9948888	0.9593705	0.8483007	0.6424762	0.3921728	0.41
0.42	0.9956920	0.9644958	0.8628393	0.6665372	0.4177749	0.42
0.43	0.9963797	0.9690684	0.8763538	0.6898401	0.4436094	0.43
0.44	0.9969669	0.9731358	0.8888757	0.7123307	0.4695813	0.44
0.45	0.9974670	0.9767429	0.9004403	0.7339621	0.4955954	0.45
0.46	0.9978917	0.9799319	0.9110859	0.7546952	0.5215571	0.46
0.47	0.9982511	0.9827422	0.9208530	0.7744985	0.5473730	0.47
0.48	0.9985544	0.9852109	0.9297839	0.7933480	0.5729517	0.48
0.49	0.9988096	0.9873722	0.9379222	0.8112268	0.5982047	0.49
0.50	0.9990234	0.9892578	0.9453125	0.8281250	0.6230469	0.50

جدولII : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=10)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=6	x=7	x=8	x=9	x=10	P
0.01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.02
0.03	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.03
0.04	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.04
0.05	0.0000028	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.05
0.06	0.0000079	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.06
0.07	0.0000193	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.07
0.08	0.0000415	0.0000020	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.08
0.09	0.0000810	0.0000045	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.09
0.10	0.0001469	0.0000091	0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.10
0.11	0.0002507	0.0000173	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.11
0.12	0.0004069	0.0000308	0.0000015	0.0000000	0.0000000	0.12
0.13	0.0006332	0.0000525	0.0000029	0.0000001	0.0000000	0.13
0.14	0.0009505	0.0000856	0.0000051	0.0000002	0.0000000	0.14
0.15	0.0013832	0.0001346	0.0000087	0.0000003	0.0000000	0.15
0.16	0.0019593	0.0002051	0.0000142	0.0000006	0.0000000	0.16
0.17	0.0027098	0.0003042	0.0000226	0.0000010	0.0000000	0.17
0.18	0.0036694	0.0004401	0.0000350	0.0000017	0.0000000	0.18
0.19	0.0048757	0.0006229	0.0000528	0.0000027	0.0000001	0.19
0.20	0.0063694	0.0008644	0.0000779	0.0000042	0.0000001	0.20
0.21	0.0081935	0.0011783	0.0001127	0.0000064	0.0000002	0.21
0.22	0.0103936	0.0015804	0.0001599	0.0000097	0.0000003	0.22
0.23	0.0130167	0.0020885	0.0002232	0.0000143	0.0000004	0.23
0.24	0.0161116	0.0027228	0.0003068	0.0000207	0.0000006	0.24
0.25	0.0197277	0.0035057	0.0004158	0.0000296	0.0000010	0.25
0.26	0.0239148	0.0044618	0.0005562	0.0000416	0.0000014	0.26
0.27	0.0287224	0.0056181	0.0007350	0.0000577	0.0000021	0.27
0.28	0.0341994	0.0070039	0.0009605	0.0000791	0.0000030	0.28
0.29	0.0403932	0.0086507	0.0012420	0.0001072	0.0000042	0.29
0.30	0.0473490	0.0105921	0.0015904	0.0001437	0.0000059	0.30
0.31	0.0551097	0.0128637	0.0020179	0.0001906	0.0000082	0.31
0.32	0.0637149	0.0155029	0.0025384	0.0002505	0.0000113	0.32
0.33	0.0732005	0.0185489	0.0031673	0.0003263	0.0000153	0.33
0.34	0.0835979	0.0220422	0.0039219	0.0004214	0.0000206	0.34
0.35	0.0949341	0.0260243	0.0048213	0.0005399	0.0000276	0.35
0.36	0.1072304	0.0305376	0.0058864	0.0006865	0.0000366	0.36
0.37	0.1205026	0.0356252	0.0071403	0.0008668	0.0000481	0.37
0.38	0.1347603	0.0413301	0.0086079	0.0010871	0.0000628	0.38
0.39	0.1500068	0.0476949	0.0103163	0.0013546	0.0000814	0.39
0.40	0.1662386	0.0547619	0.0122946	0.0016777	0.0001049	0.40
0.41	0.1834452	0.0625719	0.0145738	0.0020658	0.0001342	0.41
0.42	0.2016092	0.0711643	0.0171871	0.0025295	0.0001708	0.42
0.43	0.2207058	0.0805763	0.0201696	0.0030809	0.0002161	0.43
0.44	0.2407033	0.0908427	0.0235583	0.0037335	0.0002720	0.44
0.45	0.2615627	0.1019949	0.0273918	0.0045022	0.0003405	0.45
0.46	0.2832382	0.1140612	0.0317105	0.0054040	0.0004242	0.46
0.47	0.3056772	0.1270655	0.0365560	0.0064574	0.0005260	0.47
0.48	0.3288205	0.1410272	0.0419713	0.0076828	0.0006493	0.48
0.49	0.3526028	0.1559607	0.0480003	0.0091028	0.0007979	0.49
0.50	0.3769531	0.1718750	0.0546875	0.0107422	0.0009766	0.50

جدول **II** : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=15)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\,q^{n-y}$$

P	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	P
0.01	0.1399416	0.0096298	0.0004158	0.0000125	0.0000003	0.01
0.02	0.2614309	0.0353383	0.0030394	0.0001830	0.0000081	0.02
0.03	0.3667488	0.0729725	0.0093714	0.0008476	0.0000567	0.03
0.04	0.4579136	0.1191096	0.0202918	0.0024497	0.0002194	0.04
0.05	0.5367088	0.1709525	0.0362002	0.0054673	0.0006147	0.05
0.06	0.6047082	0.2262373	0.0571333	0.0103599	0.0014033	0.06
0.07	0.6632991	0.2831530	0.0828610	0.0175327	0.0027812	0.07
0.08	0.7137026	0.3402712	0.1129651	0.0273136	0.0049697	0.08
0.09	0.7569918	0.3964852	0.1469037	0.0399402	0.0082037	0.09
0.10	0.7941089	0.4509570	0.1840611	0.0555556	0.0127205	0.10
0.11	0.8258794	0.5030716	0.2237884	0.0742098	0.0187481	0.11
0.12	0.8530261	0.5523977	0.2654343	0.0958650	0.0264958	0.12
0.13	0.8761804	0.5986541	0.3083680	0.1204049	0.0361456	0.13
0.14	0.8958934	0.6416805	0.3519960	0.1476450	0.0478456	0.14
0.15	0.9126451	0.6814134	0.3957741	0.1773441	0.0617047	0.15
0.16	0.9268529	0.7178650	0.4392144	0.2092171	0.0777900	0.16
0.17	0.9388793	0.7511062	0.4818892	0.2429457	0.0961250	0.17
0.18	0.9490383	0.7812515	0.5234328	0.2781907	0.1166897	0.18
0.19	0.9576014	0.8084474	0.5635400	0.3146013	0.1394223	0.19
0.20	0.9648032	0.8328618	0.6019643	0.3518254	0.1642213	0.20
0.21	0.9708452	0.8546763	0.6385140	0.3895168	0.1909495	0.21
0.22	0.9759007	0.8740794	0.6730478	0.4273424	0.2194378	0.22
0.23	0.9801177	0.8912611	0.7054703	0.4649877	0.2494903	0.23
0.24	0.9836222	0.9064088	0.7357265	0.5021613	0.2808889	0.24
0.25	0.9865212	0.9197039	0.7637969	0.5385978	0.3133987	0.25
0.26	0.9889043	0.9313194	0.7896916	0.5740602	0.3467730	0.26
0.27	0.9908463	0.9414180	0.8134463	0.6083410	0.3807583	0.27
0.28	0.9924084	0.9501509	0.8351165	0.6412622	0.4150988	0.28
0.29	0.9936402	0.9576565	0.8547734	0.6726753	0.4495409	0.29
0.30	0.9945802	0.9640602	0.8725001	0.7024598	0.4838367	0.30
0.31	0.9952572	0.9694738	0.8883868	0.7305219	0.5177475	0.31
0.32	0.9956909	0.9739956	0.9025286	0.7567921	0.5510465	0.32
0.33	0.9958926	0.9777102	0.9150214	0.7812231	0.5835210	0.33
0.34	0.9958659	0.9806889	0.9259598	0.8037868	0.6149739	0.34
0.35	0.9956065	0.9829898	0.9354345	0.8244721	0.6452251	0.35
0.36	0.9951032	0.9846580	0.9435304	0.8432817	0.6741121	0.36
0.37	0.9943375	0.9857263	0.9503250	0.8602295	0.7014898	0.37
0.38	0.9932844	0.9862154	0.9558870	0.8753376	0.7272306	0.38
0.39	0.9919120	0.9861341	0.9602754	0.8886341	0.7512238	0.39
0.40	0.9901822	0.9854803	0.9635383	0.9001504	0.7733746	0.40
0.41	0.9880503	0.9842414	0.9657132	0.9099192	0.7936030	0.41
0.42	0.9854658	0.9823944	0.9668258	0.9179723	0.8118424	0.42
0.43	0.9823724	0.9799074	0.9668908	0.9243393	0.8280385	0.43
0.44	0.9787082	0.9767396	0.9659118	0.9290458	0.8421474	0.44
0.45	0.9744067	0.9728421	0.9638817	0.9321129	0.8541348	0.45
0.46	0.9693965	0.9681595	0.9607835	0.9335559	0.8639741	0.46
0.47	0.9636029	0.9626301	0.9565910	0.9333842	0.8716453	0.47
0.48	0.9569482	0.9561872	0.9512700	0.9316013	0.8771342	0.48
0.49	0.9493524	0.9487604	0.9447794	0.9282049	0.8804312	0.49
0.50	0.9407349	0.9402771	0.9370728	0.9231873	0.8815308	0.50

جدولII : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=15)

$$P[X \geq x]=1-F\ (x-1)=\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}p^{y}\ q^{n-y}$$

P	x=6	x=7	x=8	x=9	x=10	P
0.01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.02	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.02
0.03	0.0000029	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.03
0.04	0.0000150	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.04
0.05	0.0000528	0.0000035	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.05
0.06	0.0001455	0.0000117	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.06
0.07	0.0003385	0.0000320	0.0000024	0.0000001	0.0000000	0.07
0.08	0.0006952	0.0000757	0.0000065	0.0000004	0.0000000	0.08
0.09	0.0012985	0.0001602	0.0000155	0.0000012	0.0000001	0.09
0.10	0.0022497	0.0003106	0.0000336	0.0000028	0.0000002	0.10
0.11	0.0036675	0.0005610	0.0000673	0.0000063	0.0000004	0.11
0.12	0.0056850	0.0009553	0.0001261	0.0000130	0.0000010	0.12
0.13	0.0084466	0.0015484	0.0002231	0.0000251	0.0000021	0.13
0.14	0.0121035	0.0024060	0.0003763	0.0000459	0.0000041	0.14
0.15	0.0168094	0.0036049	0.0006090	0.0000803	0.0000077	0.15
0.16	0.0227158	0.0052320	0.0009502	0.0001346	0.0000138	0.16
0.17	0.0299672	0.0073833	0.0014360	0.0002179	0.0000238	0.17
0.18	0.0386966	0.0101625	0.0021093	0.0003416	0.0000398	0.18
0.19	0.0490212	0.0136792	0.0030205	0.0005203	0.0000642	0.19
0.20	0.0610390	0.0180463	0.0042273	0.0007725	0.0001008	0.20
0.21	0.0748253	0.0233778	0.0057945	0.0011205	0.0001541	0.21
0.22	0.0904304	0.0297859	0.0077939	0.0015910	0.0002303	0.22
0.23	0.1078778	0.0373780	0.0103030	0.0022156	0.0003367	0.23
0.24	0.1271629	0.0462544	0.0134044	0.0030307	0.0004828	0.24
0.25	0.1482527	0.0565050	0.0171845	0.0040777	0.0006796	0.25
0.26	0.1710862	0.0682065	0.0217319	0.0054029	0.0009407	0.26
0.27	0.1955746	0.0814203	0.0271355	0.0070576	0.0012818	0.27
0.28	0.2216035	0.0961899	0.0334831	0.0090971	0.0017211	0.28
0.29	0.2490342	0.1125391	0.0408585	0.0115806	0.0022794	0.29
0.30	0.2777063	0.1304703	0.0493403	0.0145703	0.0029803	0.30
0.31	0.3074400	0.1499634	0.0589987	0.0181305	0.0038496	0.31
0.32	0.3380393	0.1709748	0.0698938	0.0223262	0.0049159	0.32
0.33	0.3692945	0.1934370	0.0820731	0.0272222	0.0062097	0.33
0.34	0.4009860	0.2172590	0.0955696	0.0328812	0.0077636	0.34
0.35	0.4328865	0.2423261	0.1103997	0.0393624	0.0096118	0.35
0.36	0.4647647	0.2685015	0.1265612	0.0467197	0.0117891	0.36
0.37	0.4963880	0.2956270	0.1440319	0.0549999	0.0143310	0.37
0.38	0.5275250	0.3235247	0.1627687	0.0642408	0.0172723	0.38
0.39	0.5579484	0.3519991	0.1827059	0.0744693	0.0206467	0.39
0.40	0.5874368	0.3808392	0.2037555	0.0856997	0.0244856	0.40
0.41	0.6157772	0.4098208	0.2258065	0.0979321	0.0288173	0.41
0.42	0.6427665	0.4387094	0.2487252	0.1111504	0.0336657	0.42
0.43	0.6682129	0.4672627	0.2723561	0.1253213	0.0390494	0.43
0.44	0.6919374	0.4952338	0.2965229	0.1403930	0.0449803	0.44
0.45	0.7137744	0.5223737	0.3210302	0.1562946	0.0514629	0.45
0.46	0.7335728	0.5484350	0.3456652	0.1729352	0.0584928	0.46
0.47	0.7511963	0.5731741	0.3702001	0.1902042	0.0660562	0.47
0.48	0.7665241	0.5963546	0.3943953	0.2079712	0.0741284	0.48
0.49	0.7794507	0.6177499	0.4180019	0.2260871	0.0826736	0.49
0.50	0.7898865	0.6371460	0.4407654	0.2443848	0.0916443	0.50

جدول II : احتمالات ذات الحدين التجميعية (تابع) (n=15)

$$P[X \geq x] = 1 - F\ (x-1) = \sum_{y=x}^{n} \binom{n}{y} p^{y}\, q^{n-y}$$

P	x=11	x=12	x=13	x=14	x=15	P
0.01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.02
0.03	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.03
0.04	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.04
0.05	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.05
0.06	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.06
0.07	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.07
0.08	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.08
0.09	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.09
0.10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.10
0.11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.11
0.12	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.12
0.13	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.13
0.14	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.14
0.15	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.15
0.16	0.0000013	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.16
0.17	0.0000024	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.17
0.18	0.0000043	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.18
0.19	0.0000074	0.0000006	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.19
0.20	0.0000125	0.0000010	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.20
0.21	0.0000204	0.0000018	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.21
0.22	0.0000325	0.0000030	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.22
0.23	0.0000506	0.0000049	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.23
0.24	0.0000771	0.0000079	0.0000006	0.0000000	0.0000000	0.24
0.25	0.0001153	0.0000124	0.0000009	0.0000000	0.0000000	0.25
0.26	0.0001693	0.0000191	0.0000015	0.0000001	0.0000000	0.26
0.27	0.0002444	0.0000290	0.0000024	0.0000001	0.0000000	0.27
0.28	0.0003474	0.0000432	0.0000037	0.0000002	0.0000000	0.28
0.29	0.0004866	0.0000634	0.0000058	0.0000003	0.0000000	0.29
0.30	0.0006722	0.0000917	0.0000087	0.0000005	0.0000000	0.30
0.31	0.0009169	0.0001307	0.0000130	0.0000008	0.0000000	0.31
0.32	0.0012356	0.0001841	0.0000192	0.0000012	0.0000000	0.32
0.33	0.0016463	0.0002561	0.0000278	0.0000019	0.0000001	0.33
0.34	0.0021700	0.0003521	0.0000399	0.0000028	0.0000001	0.34
0.35	0.0028314	0.0004789	0.0000566	0.0000042	0.0000001	0.35
0.36	0.0036589	0.0006447	0.0000795	0.0000061	0.0000002	0.36
0.37	0.0046850	0.0008593	0.0001104	0.0000088	0.0000003	0.37
0.38	0.0059467	0.0011348	0.0001517	0.0000127	0.0000005	0.38
0.39	0.0074855	0.0014854	0.0002066	0.0000180	0.0000007	0.39
0.40	0.0093477	0.0019278	0.0002789	0.0000252	0.0000011	0.40
0.41	0.0115843	0.0024818	0.0003733	0.0000351	0.0000016	0.41
0.42	0.0142514	0.0031702	0.0004954	0.0000485	0.0000022	0.42
0.43	0.0174098	0.0040196	0.0006525	0.0000663	0.0000032	0.43
0.44	0.0211247	0.0050603	0.0008530	0.0000901	0.0000045	0.44
0.45	0.0254659	0.0063268	0.0011070	0.0001215	0.0000063	0.45
0.46	0.0305067	0.0078579	0.0014268	0.0001626	0.0000087	0.46
0.47	0.0363239	0.0096975	0.0018268	0.0002161	0.0000121	0.47
0.48	0.0429969	0.0118941	0.0023240	0.0002854	0.0000165	0.48
0.49	0.0506066	0.0145013	0.0029382	0.0003744	0.0000225	0.49
0.50	0.0592346	0.0175781	0.0036926	0.0004883	0.0000305	0.50

جدول III: احتمالات بواسون التجميعية

$$P[X \geq x] = 1 - F(x-1) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

x	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.7$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.1812692	0.2591818	0.3296800	0.3934693	0.4511884	0.5034147
2	0.0175231	0.0369363	0.0615519	0.0902040	0.1219014	0.1558050
3	0.0011485	0.0035995	0.0079263	0.0143877	0.0231153	0.0341416
4	0.0000568	0.0002658	0.0007763	0.0017516	0.0033581	0.0057535
5	0.0000023	0.0000158	0.0000612	0.0001721	0.0003945	0.0007855
6	0.0000001	0.0000008	0.0000040	0.0000142	0.0000389	0.0000900
7	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000010	0.0000033	0.0000089
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000002	0.0000008
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001

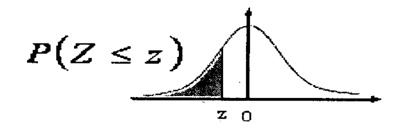
x	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.9$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.2$	$\lambda = 1.4$	$\lambda = 1.6$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.550671	0.593430	0.632121	0.698806	0.753403	0.798104
2	0.191208	0.227518	0.264241	0.337373	0.408167	0.475069
3	0.047423	0.062857	0.080301	0.120513	0.166502	0.216642
4	0.009080	0.013459	0.018988	0.033769	0.053725	0.078814
5	0.001411	0.002344	0.003660	0.007746	0.014253	0.023682
6	0.000184	0.000344	0.000594	0.001500	0.003201	0.006040
7	0.000021	0.000043	0.000083	0.000251	0.000622	0.001336
8	0.000002	0.000005	0.000010	0.000037	0.000107	0.000260
9	0.000000	0.000001	0.000001	0.000005	0.000016	0.000045
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000007
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

جدول III: احتمالات بواسون التجميعية (تابع)

$$P[X \geq x]=1-F(x-1)=\sum_{y=x}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

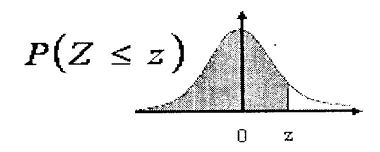
x	λ = 1.8	λ = 2	λ = 2.5	λ = 3	λ = 3.5	λ = 4	λ = 4.5	λ = 5
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.834701	0.864665	0.917915	0.950213	0.969803	0.981684	0.988891	0.993262
2	0.537163	0.593994	0.712703	0.800852	0.864112	0.908422	0.938901	0.959572
3	0.269379	0.323324	0.456187	0.576810	0.679153	0.761897	0.826422	0.875348
4	0.108708	0.142877	0.242424	0.352768	0.463367	0.566530	0.657704	0.734974
5	0.036407	0.052653	0.108822	0.184737	0.274555	0.371163	0.467896	0.559507
6	0.010378	0.016564	0.042021	0.083918	0.142386	0.214870	0.297070	0.384039
7	0.002569	0.004534	0.014187	0.033509	0.065288	0.110674	0.168949	0.237817
8	0.000562	0.001097	0.004247	0.011905	0.026739	0.051134	0.086587	0.133372
9	0.000110	0.000237	0.001140	0.003803	0.009874	0.021363	0.040257	0.068094
10	0.000019	0.000047	0.000277	0.001103	0.003315	0.008132	0.017093	0.031828
11	0.000003	0.000008	0.000062	0.000292	0.001019	0.002840	0.006669	0.013695
12	0.000001	0.000001	0.000013	0.000071	0.000289	0.000915	0.002404	0.005453
13	0.000000	0.000000	0.000002	0.000016	0.000076	0.000274	0.000805	0.002019
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000019	0.000076	0.000252	0.000698
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000020	0.000074	0.000226
16	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000005	0.000020	0.000069
17	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000005	0.000020
18	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000005
19	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

جدول IV: المساحات تحت كثافة التوزيع المعتدل المعيارى



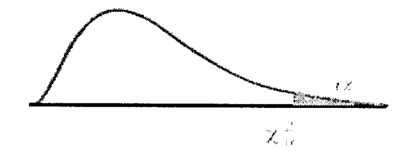
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول IV: المساحات تحت كثافة التوزيع المعتدل المعيارى (تابع)



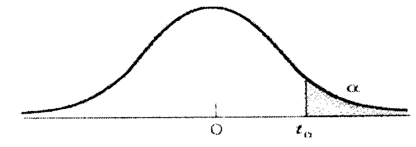
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

جدول ٧: قيم $\chi^2_\alpha(k)$



α / df	0.99	0.975	0.95	0.9	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01
1	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.73
12	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89
40	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81

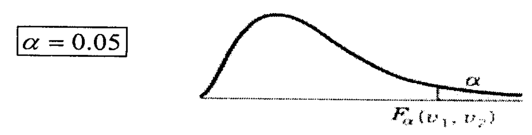
جدول VI: قيم $t_\alpha(k)$



df \ α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.0087	0.00625	0.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	38.204	50.923	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	7.650	8.860	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.392	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.315	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	3.810	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.288	3.521	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.335	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.206	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	2.934	3.111	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.038	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	2.981	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	2.780	2.934	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	2.896	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.864	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.837	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.813	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.793	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.775	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.759	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.744	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.602	2.732	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.720	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.710	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.700	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.692	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.684	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.553	2.676	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.547	2.669	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.663	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.536	2.657	2.750
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.463	2.575	2.660
90	0.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.440	2.549	2.632
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.428	2.536	2.617
∞	0.674	1.282	1.645	1.96	2.326	2.394	2.498	2.576

جدول VII: قيم $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$

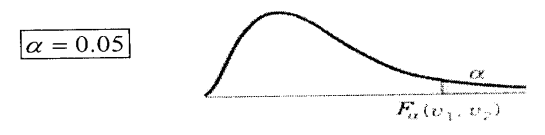
$\alpha = 0.05$



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

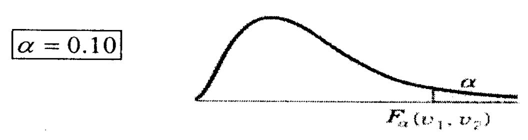
جدول VII: قيم $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ (تابع)

$\alpha = 0.05$



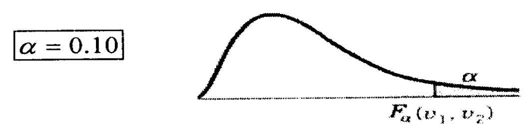
ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	25	30	40	60
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	252.20
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43
∞	1.83	17.30	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32

جدول VII: قيم $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ (تابع)



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63

جدول VII: قيم $F_{\alpha}(\nu_1,\nu_2)$ (تابع)



ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	25	30	40	60
1	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79
2	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47
3	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15
4	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79
5	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14
6	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.76
7	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51
8	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34
9	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
10	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.11
11	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03
12	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96
13	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90
14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.86
15	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.82
16	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.78
17	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.75
18	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.72
19	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.70
20	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.68
21	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.66
22	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64
23	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.62
24	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61
25	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.59
26	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.58
27	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.57
28	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.56
29	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.55
30	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.54
40	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47
60	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.40
120	1.65	1.60	1.55	1.48	1.44	1.41	1.37	1.32
∞	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24

المراجع

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (editors) (1970). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards. Applied Mathematical Series (55), U. S. A.

[2] Angers, J. F. (1992). Use of Student-t prior for the estimation of normal means : A computational approach, In Bayesian Statistics 4 (Eds. J. M. Bernardo, J. O. Berrger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith), Oxford : Oxford University Press, pp 567 - 575.

[3] Boswell, M. T., Ord, J. K. and Patil, G. P. (1979). Chance mechanisms underlying univariate distribution. Statistical Ecology, 4 : Statistical Distribution in Ecological Work, J. K. Ord., G. P. Patil and C. Taillie (editors). International Cooperative Publishing Hourse, Maryland.

[4] Daniels, H. E. (1961). Mixtures of geometric distributions. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 23, 409 - 413.

[5] Douglas, J. B. (1980). Analysis with standard Contagious Distributions. International Co-operative Publishing House, Maryland.

[6] Feller, W. (1957). An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1. Second Edition, Wiley.

[7] Fisz, M. (1963). Probability Theory and Mathematical Statistics. Wiley.

[8] Freund, J. E. and Walpole, R. E. (1980). Mathematical Statistics. Third Edition, Prentice-Hall International, New Jersy.

[9] Fraser, D. (1960). Statistics : An Introduction. Wiley.

[10] Goldberg, S. (1961). Probability : An Introduction, Prentice-Hal International, New Jersy.

[11] Hoel, P. G. (1971). Introduction to Mathematical Statistics Fourth Edition, Wiley.

[12] Johnson, N., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). Continuous Univariate Distributions. Vol. 1, Second Edition, Wiley.

[13] Johnson, N., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). Continuous Univariate Distributions. Vol. 2, Second Edition, Wiley.

[14] Johnson, N., Kotz, S. and Kemp, A. (1992). Discrete Univariate Distributions. Second Edition, Wiley.

[15] Lauritzen, S. L., Thommesen, C. and Anderson, J. B. (1990). A Stochastic model in mobile communication. Stochastic Processes and Their Applications 36, 165 - 172.

[16] Meyer, P. L. (1965). Introductory Probability and Statistical Applications Addison-Wesley, Reading.

[17] Mirza, M. and Boyer, K. L. (1992). Performance evaluation of a class of M estimators for surface parameter estimation in nose range data.

[18] Mood, A., Graybill, F. and Boes, D. (1982). Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition, McGraw-Hill, Auckland.

[19] Parzen, E. (1960). Modern Probability Theory and Its Applications. Wiley.

[20] Parzen, E. (1962). Stochastic Processes. Holden Day, San Francisco.

[21] Ross, S. (1976). A First Course in Probability. Macmillan, New York.

[22] Sneddon, I. N. (1954). Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry. Oliver and Boyd, London.

[23] Taylor, H. and Karlin, S. (1984). An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, Florida.

[24] Taylor, S. J. and Kingsman, B. G. (1979). An analysis of the variance and distribution of commodity price-changes. Australian J. of Management 4, 135 - 149.

[25] Tucker, H. G. (1967). An Introduction to Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Florida.

[26] Verdinelli, I. and Wasserman, L. (1991). Bayesian analysis of outlier problems using the Gibbs sampler. Statistics and Computing 1, 105 - 117.

[27] Weibull, W. (1951). A Statistical distribution of wide applicability. Journal of Applied Mechanics, 18, 293-297.